

Structures fractales naturelles

Du macroscopique...

La nature fournit de nombreux exemples de structures fractales allant de fractions de l'échelle de l'univers à l'échelle atomique. On les observe dans la distribution des galaxies, dans les structures nuageuses, les formes des reliefs, les écoulements turbulents à la surface de planète comme Jupiter, les roches fracturées, les surfaces rugueuses, les matériaux désordonnés, les agrégats de particules et d'atomes... Nous commencerons par décrire les structures fractales « géantes ». Leur existence n'est pas surprenante car il s'agit de l'essence même de la notion de fractales et de phénomènes critiques : un processus physique engendrant des structures fractales, où il n'existe par construction plus d'échelle interne, n'a aucune raison d'être limité supérieurement en taille si les paramètres du processus ont des valeurs convenables. C'est ce que nous allons montrer dans la suite de ce chapitre.

Nous profiterons des divers exemples décrits ici pour introduire de nouvelles notions mathématiques ou de nouveaux modèles physiques. Bien que le thème de ce chapitre concerne les structures fractales géantes, nous signalerons au fur et à mesure les structures fractales possédant des caractéristiques semblables mais à des échelles totalement différentes.

2.1 Distribution de galaxies

Dès les premières décades du XX^e siècle, les astronomes ont remarqués « l'amasement » hiérarchique des galaxies. Les résultats d'observations récentes montrent un univers hautement structuré mais également hautement désordonné. Il se révèle en fait moins simple que prévu : à une échelle plus grande que les amas de galaxies, la matière semble organisée en structures aplaties, filamenteuses et lacunaires. Les progrès dans l'analyse des amas sont étroite-

ment liés aux progrès théoriques dans l'étude de l'origine des structures cosmiques, et il est important de comparer avec les observations les divers modèles de *big-bang* qui prédisent les distributions de galaxies.

2.1.1 Distribution d'amas dans l'univers

On remarque tout d'abord que les galaxies sont distribuées par paquets à toutes les échelles. Notre galaxie c'est-à-dire la Voie lactée, appartient à ce que l'on appelle le Groupe local d'une vingtaine de galaxies ; sa taille est d'environ¹ 1 Mpc. L'amas le plus proche est ensuite celui de la Vierge à environ 10 Mpc de nous, puis la Coma (Chevelure de Bérénice) formée de quelques milliers de galaxies à 100 Mpc. Ces amas font eux-mêmes partie de super-amas. Nous appartenons au Super-amas local, découvert par de Vaucouleurs vers 1958. Il a la forme d'un disque d'environ 1 Mpc de large sur 20 Mpc de long. Cette hiérarchie locale à laquelle appartient notre galaxie est en fait une structure très générale.

A partir des observations on constate les distributions en masses et distances suivantes :

Les galaxies : – leur masse représente $\approx 10^{12}$ à $10^{14} M_{\odot}$ (masses solaires).
– et leur taille ≈ 10 à 100 Kpc

La moitié des galaxies appartient à des groupes de quelques dizaines avec
– une masse $\approx 10^{12}$ à $10^{14} M_{\odot}$
– une taille $\approx 1/10$ à 10 Mpc

Les amas sont formés de quelques milliers de galaxies avec
– une masse $\approx 10^{15} M_{\odot}$
– une taille ≈ 10 Mpc

La difficulté essentielle dans la cartographie tridimensionnelle de l'univers est le problème des distances. La distance de la plupart des galaxies a été mesurée à partir de leur décalage vers le rouge, z : dans l'interprétation conventionnelle la vitesse d'expansion v et donc z sont liés à la distance D de l'objet par la loi de Hubble $v = cz = H_0 D$. Deux difficultés apparaissent alors : la constante H_0 est mal connue (entre 50 et 100 km/sec par Mpc, - 82 semble une bonne valeur ?) et les galaxies ont leur vitesse propre, inconnue, se superposant à l'expansion. Il existe d'autres méthodes de mesure des distances mais elles consomment beaucoup de temps d'ordinateur et les distances de quelques galaxies seulement ont été déterminées ainsi. Ceci explique les controverses sur l'extension du domaine fractal.

La théorie de formation des étoiles et des galaxies, due à Hoyle, le modèle descriptif de Fournier d'Albe et surtout les données empiriques sont unani-

¹ (Les unités de distance et de masse pausées dans ce domaine sont respectivement la parsec (c'est-à-dire la distance moyenne entre la terre et le soleil, 1 U.A. ≈ 150 millions de km) apparaît sous un angle d'une seconde d'arc, 1pc $\approx 3,08 \cdot 10^{13}$ km (une année-lumière correspond à $9,45 \cdot 10^{12}$ km soit environ 0,307 pc).

mes à suggérer une large zone d'homothétie interne dans laquelle la dimension fractale est voisine de $D = 1$. Mais revenons au siècle dernier et aux questions que l'on se posait alors.

2.1.2 Le paradoxe du ciel en feu d'Olbers

Le paradoxe d'Olbers (1823) consiste à remarquer que si la distribution de corps célestes était uniforme alors le ciel nocturne ne serait pas noir. En effet la densité de luminosité d'une étoile est (grossièrement) la même pour toutes les étoiles de même type, puisque si elle est située à une distance R , sa luminosité décroît bien sûr en $1/R^2$ mais il en est de même de son diamètre apparent. Avec une distribution uniforme dans l'univers, presque toutes les directions issues d'un observateur terrestre coupent le disque apparent d'une étoile, du moins si l'univers est infini². On a également montré que même pour un univers fini réaliste la luminosité du ciel serait trop forte de plusieurs ordres de grandeur. Le paradoxe disparaît si $\mathcal{M}(R) \propto R^D$ avec $D < 2$ car alors une proportion importante de directions n'intersecte aucune étoile³ (voir les figures 2.1.1 et 2.1.2). L'hypothèse de répartition fractale est suffisante mais bien sûr pas nécessaire.

Cette idée, Fournier d'Albe l'avait exprimée au début du siècle dans un modèle totalement irréaliste. Nous avons représenté ci-dessous le modèle hiérarchique très simple de Fournier (on a choisi les facteurs d'échelle et de masse égaux à 5, c'est-à-dire que $D = 1$). Avec une telle distribution le ciel paraîtrait parsemé d'étoile sur un fond noir :

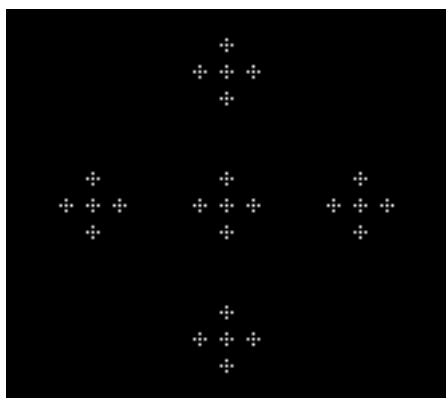


Fig. 2.1.1 Modèle hiérarchique de Fournier d'Albe. Ici la dimension fractale est $D = 1$.

Charlier vers 1908 construit un modèle hiérarchisé plus aléatoire à chaque niveau de hiérarchie et donc plus réaliste que le modèle hiérarchique non statistique de Fournier (1907) qui cependant contient déjà l'idée intéressante

² Le paradoxe d'Olbers est en fait résolu si l'on admet l'hypothèse du *Big-Bang* et de l'univers en expansion, car le domaine observé de la terre est alors fini (on ne pas pas voir les objets plus éloignés que λct , c étant la célérité de la lumière et t l'âge de l'univers.

³ Il faut en fait $D < 3/2$ pour une autre raison, voir par exemple Pecker, 1988, page 18.

(voir Charlier, 1922). Pour introduire une notion de structure fractale dans la répartition des masses, Mandelbrot a ensuite proposé (Mandelbrot, 1982, p. 294) un modèle d'univers « semé ».

L'univers semé de Mandelbrot, de dimension D , est simulé par un *vol de Lévy* : soient E_i et E_j (E pour étoile) deux points successifs où sont situés les objets. Ils sont choisis tels que $E_i E_j$ ait une direction arbitraire et une longueur $|E_i E_j| = U$ distribuée suivant la loi de probabilité,

$\text{Prob}(U > u) = u^{-D}$ quand $u > 1$, et $\text{Prob}(U > u) = 1$ quand $u < 1$;

D se trouve être la dimension fractale. Pour satisfaire la condition $\langle U^2 \rangle = \infty$ (la distribution n'est pas bornée), il faut $0 < D < 2$.

On obtient ainsi une collection d'objets dont la distribution des distances les séparant est très étalée, avec une décroissance lente de la probabilité avec la distance. Schématiquement, les objets ont tendance à se grouper selon une hiérarchie (figure 2.1.2). Les directions au hasard issues d'un observateur terrestre T , ont une probabilité presque sûrement nulle d'intersecter un disque stellaire ; l'observateur voit alors un ciel essentiellement noir.

Cette représentation par un vol de Lévy est intuitive (*ad hoc*) et non fondée sur la physique de formation des étoiles et des galaxies. Cependant elle fournit une représentation assez convaincante de la manière dont les corps célestes peuvent être distribués pour être en accord avec l'observation que nous avons décrite plus haut.

Les objets (étoiles...) sont représentés par des points noirs dans le dessin. Tous les points n'ont pas été représentés et les traits indiquent le parcours suivi pendant la construction.

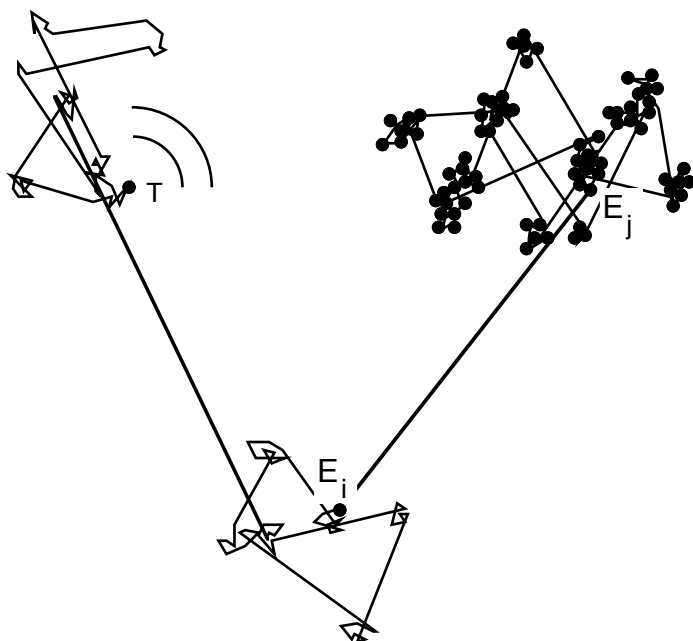


Fig. 2.1.2 Trace d'un vol de Lévy, marche au hasard dont le libre parcours moyen diverge quand $D < 1$. Les points d'arrivée des sauts simulent une distribution d'objets célestes de dimension D .

Mais cette structure statistique est encore trop simpliste (c'est pourquoi Mandelbrot a également proposé le modèle des trémas (Mandelbrot, 1982)). A partir des tables et malgré les imprécisions sur les distances on arrive au résultat suivant : l'univers est formé de paquets jusqu'à 20 Mpc avec une dimension fractale, $D \cong 1,23 \pm 0,04$ sur un domaine de l'ordre de 20 Mpc^4 (de Vaucouleurs, 1970 ; Pietronero, 1987 ; Coleman *et al.*, 1988 ; Peebles, 1989). La détermination de la dimension fractale est faite en calculant la fonction de corrélation

$$\Gamma(r) = \langle n(\vec{r}_0) n(\vec{r}_0 + \vec{r}) \rangle / \langle n(\vec{r}) \rangle^2$$

où $n(\vec{r})$ est la densité locale de masse en \vec{r} ; $\langle n(\vec{r}) \rangle$ en est la valeur moyenne, dépendant de la taille de l'échantillon, alors que $\Gamma(r)$ n'en dépend pas (voir Pietronero 1987, Blanchard & Alimi, 1988, Coleman dans Pietronero 1989, pour une discussion de ce point). Une autre difficulté est que les catalogues ne fournissent pas les masses des galaxies, mais seulement leur position (direction et déplacement vers le rouge) ; de plus les distributions de matière ne rayonnant pas est mal connue. La structure semble différente à grande distance ($>20 \text{ Mpc}$) et le domaine reste encore largement ouvert et controversé. Enfin on doit garder présent à l'esprit le fait que la statistique de la distribution est faite de la terre à un « instant » donné et que l'image d'une photographie instantanée d'objets dans l'espace ne correspond pas à la réalité, les effets de relativité étant inévitables à ces échelles.

Dernières remarques à propos des distributions de masse dans l'univers : en 1895, Seeliger considérant que les forces de gravitation décroissent elles aussi en R^{-2} a cherché les conditions pour que la force gravitationnelle et le potentiel newtonien ne divergent pas, en suivant les idées de Charlier. En 1930, Paul Lévy (Lévy, 1930) reprenant de manière indépendante ce problème suggère lui aussi une construction hiérarchique pour satisfaire cette contrainte. Cette construction est celle d'une structure fractale ! Malheureusement le problème des forces gravitationnelles est plus complexe que celui de l'éclairement, puisque des forces peuvent se compenser⁵. Signalons enfin qu'une explication dynamique des lois d'échelle des galaxies a été proposée Balian & Schaeffer (Balian & Schaeffer, 1989).

2.2 Reliefs, nuages, fractures...

Il a été rapidement remarqué par Mandelbrot que si les côtes présentaient un caractère fractal, il devait être également possible de générer numériquement divers objets naturels comme le relief des montagnes, les cratères de la Lune ou les nuages (les paysages engendrés sur ordinateurs pour la production de

⁵ Les avis divergent encore sur ce point : Peebles pense que la dimension fractale s'étend jusqu'à 5Mpc, Pietronero et Mandelbrot qu'elle s'étend à l'infini.

⁵ On trouvera une bonne introduction à ces questions dans « L'univers : des faits aux théories » de la collection "Pour la Science", diffusée par Belin (Pecker, 1988).

certaines films de science fiction est certainement l'une des applications les plus coûteuses des fractales !). La méthode la plus simple pour créer un relief artificiel s'appuie sur la fonction brownienne d'un point, définie par P. Lévy (1948), plus précisément sur les fonctions browniennes fractionnaires.

Indiquons tout d'abord qu'il s'agit d'une approche essentiellement visuelle et que la compréhension de la structure des reliefs est étroitement liée aux processus de propagation des fractures, un domaine encore très imparfaitement compris.

Nous allons prendre prétexte des formes des côtes pour introduire ici des considérations sur le *mouvement brownien* et sa généralisation, le *mouvement brownien fractionnaire*. Les marches au hasard, à la base des mouvements browniens, seront également utilisées à propos des structures des chaînes de polymères.

D'autre part, les enregistrements de l'évolution dans le temps de divers paramètres naturels comme la température, les chutes de pluie, le débit des rivières, ou... les cours de la bourse, montrent une structure que l'on peut représenter par un mouvement brownien fractionnaire. Les premières lois empiriques concernant l'évolution de ces phénomènes naturels sont dues à Hurst. Hurst s'est en effet longuement intéressé aux variations de niveau des retenues d'eau et des rivières (Hurst, 1951, Hurst *et al.*, 1965), pour lesquels il a utilisé une méthode (développée par la suite par Mandelbrot sous le nom d'analyse R/S) qui permet de caractériser ces variations au moyen d'un exposant, appelé maintenant exposant de Hurst, H .

2.2.1 Mouvement brownien, sa dimension fractale

Un mouvement brownien est représenté par une succession de sauts \vec{r}_i , aléatoires en direction, de longueur égale ou éventuellement de longueur U elle-même aléatoire, mais possédant une longueur moyenne finie a . Ce dernier cas correspond par exemple à ce que l'on appelle un *vol de Rayleigh*, qui

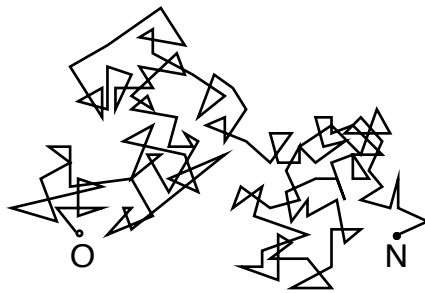


Fig. 2.2.1 Trace d'un mouvement brownien bidimensionnel (on dit aussi *vol brownien*). Pour un nombre assez grand de pas N , on constate que la trace devient dense dans le plan : sa dimension fractale est $D = 2$ quelle que soit la dimension d de l'espace où il est plongé.

est tel que

$$\text{Prob}(U > u) = \exp(-u\sqrt{2}/a). \quad (2.2-1)$$

Le vecteur joignant les extrémités d'une marche brownienne de N pas est,

$$\vec{R}_N = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_N$$

La distance quadratique *moyenne* de ces marches est linéaire en N puisque,

$$R^2 \equiv \langle \vec{R}_N^2 \rangle = \sum_{n,m} \langle \vec{r}_n \cdot \vec{r}_m \rangle = \sum_n \langle \vec{r}_n^2 \rangle = Na^2 \quad (2.2-2)$$

car chaque pas est de longueur moyenne $a = \sqrt{\langle \vec{r}_n^2 \rangle}$, et deux pas différents sont non corrélés. La distance moyenne parcourue varie donc comme la racine du nombre de pas (voir aussi les problèmes de diffusion au chapitre 4),

$$R = a\sqrt{N}$$

Si on prend comme mesure (« masse ») le nombre N de points visités lors du mouvement brownien ou encore la longueur \mathcal{L} de la trajectoire ON, la relation « masse »-rayon,

$$N = (R/a)^2 \text{ ou bien } \mathcal{L} = Na = R^2/a \quad (2.2-3)$$

montre que la dimension fractale du mouvement brownien est $D = 2$ et ceci quelle que soit la dimension d de l'espace où il est plongé ($d \geq 2$).

Pour $d = 1$, le mouvement Brownien ne peut conserver la dimension fractale $D = 2$, et la trajectoire repasse un nombre infini de fois aussi près que l'on veut d'un point arbitraire.

Bien sûr la trajectoire (trace) d'un mouvement brownien est bien trop irrégulière pour représenter la ligne d'une côte (figure 2.2.1). Une ligne de côte est en outre une courbe qui ne se recoupe pas.

Calcul de la distribution de probabilités

Considérons le mouvement brownien d'une particule, et cherchons à déterminer la probabilité de la trouver au point \vec{R} à l'instant t , sachant qu'elle se trouvait à l'origine à $t = 0$. Deux aspects se confondent ici, l'aspect géométrique et l'aspect dynamique, dans la mesure où le temps t reste en moyenne proportionnel au nombre de pas N . (Nous aborderons dans le chapitre 4, les problèmes liés aux temps d'attente anormaux entre chaque saut).

Le *théorème de la limite centrale* permet d'obtenir la distribution de R_N quand N tend vers l'infini. Il est bien connu que l'on obtient une distribution gaussienne pour la distribution de probabilité (a et τ sont fixés),⁶

$$P(\vec{R}, t) \rightarrow \frac{1}{(4\pi \mathcal{D} t)^{d/2}} \exp - \frac{\vec{R}^2}{4 \mathcal{D} t} \quad (2.2-4)$$

avec $t = N\tau$, et le coefficient de diffusion, $\mathcal{D} = \langle \vec{r}_n^2 \rangle / 2 \tau$.

La distance quadratique moyenne est alors donnée par,

~~Une dérive \vec{V} due à un champ extérieur ($\vec{V} = \langle \vec{r}_n \rangle / \tau$), peut par ailleurs se superposer au mouvement brownien~~

$$R^2 = \langle \vec{R}^2 \rangle = 2 \mathcal{D} t \quad (2.2-5)$$

On voit sur l'équation (2.2-3) que P est une fonction de R/\sqrt{t} :

$$P = \frac{1}{R^d} f\left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)$$

C'est une loi d'échelle pour le mouvement brownien : la transformation $t \rightarrow bt$ et $R \rightarrow \lambda R$ avec $\lambda = b^2$, laisse invariante la probabilité ($P dv$) de trouver la particule dans un volume dv autour de \vec{R} .

2.2.2 Mouvement brownien scalaire

Examinons maintenant une autre courbe, celle des gains cumulatifs d'un joueur de pile ou face en fonction du nombre de coups : quelle est par exemple la distribution dans le temps des retours à des gains nuls pour le joueur ?

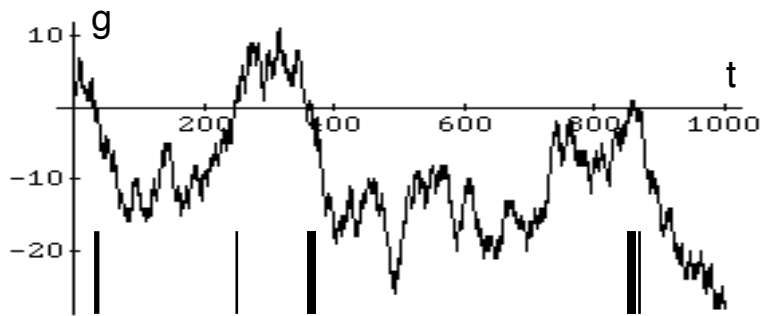


Fig. 2.2.2 Mouvement brownien scalaire. Les segments verticaux au bas de l'image indiquent les positions sur l'axe t des zéros de $g(t)$.

Cette distribution ressemble beaucoup à un vol de Lévy : elle se produit en rafales (quand on est au voisinage d'un gain nul on y repasse plus fréquemment que lorsque l'on en est loin).

Soit g le gain à l'instant t sachant qu'il était zéro à l'instant $t = 0$, d'après ce qui précède la probabilité d'avoir un gain ($g > 0$) ou une perte ($g < 0$) au bout d'un temps t (le temps entre deux coups est pris comme unité) est,

$$P(g, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp - \frac{g^2}{2t} \quad (2.2-6)$$

Le retour à l'origine (gain nul) suit donc la loi,

$$P(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \quad (2.2-7)$$

de sorte que la *distribution des temps de gain nul est une distribution fractale de dimension $D = 1/2$.*

Pour déterminer la dimension fractale des temps de gains nuls, on calcule le nombre d'événements qui se produisent en moyenne pendant un intervalle de temps t , soit

$$N_0 = \int_0^t P(0,t') dt' = \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{2\pi t'}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{1/2} \propto t^D$$

La distribution des temps de gain nul est une poussière de Cantor comme on peut le voir sur la figure 2.2.2 (indiquée par des barres de Cantor). Notons que les intervalles de temps entre les coups peuvent ne pas être choisis égaux et on peut tout aussi bien prendre une distribution de Poisson pour ces temps, le temps moyen entre deux sauts doit seulement être fini.

Une telle courbe brownienne scalaire peut également représenter l'évolution dans le temps du potentiel $V_B(t)$ aux bornes d'un appareillage électrique (présence d'un bruit brownien). Enfin un mouvement brownien en $d = 3$ est le mouvement d'un point de coordonnées $\{X_B(t), Y_B(t), Z_B(t)\}$ dont chacune est une fonction brownienne scalaire.

Revenons au relief : la courbe *brownienne scalaire* de la figure 2.2.2 peut sembler une assez bonne simulation d'une ligne de crête. Montrons qu'il est possible de généraliser ceci aux dimensions d supérieures.

2.2.3 Fonction brownienne d'un point

La fonction brownienne d'un point $B(P)$, a été définie par Lévy (1948) dans le cas de la sphère, puis étendue au plan indépendamment par Mandelbrot et Tchensov. Le processus est le suivant : partant d'un plan, on

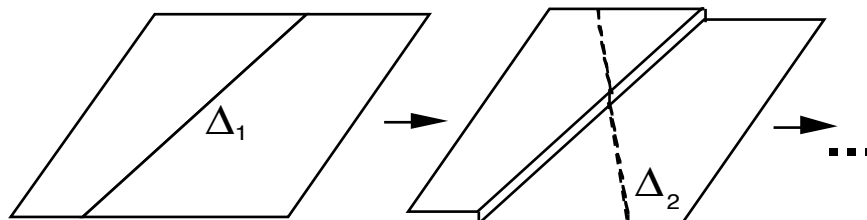


Fig. 2.2.3 Construction d'une fonction brownienne d'un point à partir d'un plan. On peut appliquer cette méthode à la sphère et construire ainsi un relief planétaire.

crée des marches aléatoires suivant des droites Δ_i de position et direction aléatoires. En répétant l'opération une infinité de fois on engendre une surface fractale. Cette surface n'est pas autosimilaire (car la direction verticale est privilégiée) mais auto-affine. Nous reviendrons sur cette notion dans cette même section.

2.2.4 Mouvement brownien fractionnaire

Le mouvement brownien fractionnaire est l'un des modèles mathématiques les plus utiles pour décrire nombre de fractales statistiques rencontrées dans la nature. C'est une extension de la notion usuelle de mouvement brownien (Mandelbrot et Wallis, 1968). Sur une droite, le mouvement brownien frac-

tionnaire est représentable par une fonction indiquant à chaque instant t l'amplitude V_H du mouvement.

Une fonction brownienne fractionnaire $V_H(t)$ est une fonction univaluée d'une variable t (ce peut être par exemple un potentiel dépendant du temps). Ses incréments $V_H(t_2) - V_H(t_1)$ ont une distribution gaussienne de variance

$$\mathcal{V}(t_2 - t_1) = \Delta V^2(t_2 - t_1) = \langle [V_H(t_2) - V_H(t_1)]^2 \rangle = A |t_2 - t_1|^{2H} \quad (2.2-8)$$

où $\langle \rangle$ désigne la moyenne de $V_H(t)$ sur beaucoup d'échantillons, et où H a une valeur $0 < H < 1$. Cette fonction, incrément quadratique moyen, est stationnaire et isotrope (c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de $t_2 - t_1$ et est invariante par $t \rightarrow -t$) ; tous les t sont statistiquement équivalents. La valeur particulière $H = 1/2$ donne le mouvement brownien usuel où $\Delta V^2(t) \propto t$. Comme pour le mouvement brownien, $V_H(t)$ est continue mais n'est différentiable nulle part. Nous verrons plus loin, dans le chapitre concernant le transport dans les milieux fractals, que le cas $H \neq 1/2$ correspond à un coefficient de diffusion anormal. En effet le coefficient de diffusion peut se généraliser par analogie avec l'expression 2.2-5 (qui est vérifiée quand $H = 1/2$, avec $d = 1$, $R \rightarrow V$ et $\mathcal{D}_{1/2} \equiv \mathcal{D}$),

$$\mathcal{D}_H = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle V_H(t)^2 \rangle \propto t^{2H-1} \quad (2.2-9)$$

Ainsi pour $H < 1/2$, la diffusion devient de plus en plus difficile à mesure que le temps s'écoule il y a *sous-diffusion*, alors que pour $H > 1/2$, on a *surdiffusion*. Ces diffusions anormales s'observent dans les milieux désordonnés ou mal connectés ($H < 1/2$), où la sousdiffusion est semblable à celle d'une « fourmi dans un labyrinthe » imaginée par de Gennes (voir le § 5.2.2) ou dans les milieux turbulents ($H > 1/2$) dans lesquels la particule est surdiffusive car entraînée par des tourbillons de toutes les tailles qui peuvent lui faire effectuer des trajets aussi grands que l'on veut avant qu'elle ne change de direction (la trajectoire est alors analogue à un vol de Lévy).

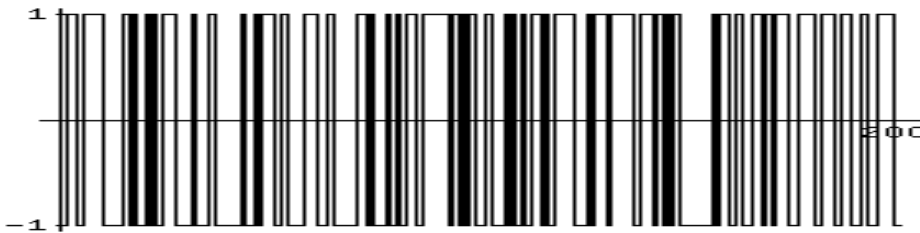


Fig. 2.2.4 Graphe d'un bruit blanc, « dérivée » (incrément) des 200 premiers coups du graphe brownien de la figure 2.2.2. Les parties noires proviennent de suites de pile (+1) et face (-1) non résolues graphiquement.

De nombreuses constructions ont été élaborées (et en particulier en relation avec le problème de diffusion de la lumière par des fractales) qui donnent un

sens à la « dérivée d'un mouvement brownien fractionnaire » en tant que *bruit Gaussien fractionnaire*. La dérivée d'un mouvement brownien normal $H = 1/2$ correspond au *bruit blanc Gaussien non corrélé* de sorte que le mouvement brownien est dit avoir des *incrémentés indépendants* (voir la figure 2.2.4) :

Formellement pour trois temps $t_1 < t < t_2$, $\Delta V_1 = V_H(t) - V_H(t_1)$ et $\Delta V_2 = V_H(t_2) - V_H(t)$ sont statistiquement indépendants quand $H = 1/2$.

Pour vérifier ceci calculons

$$\mathcal{V}(2t) = \langle [V_H(t) - V_H(-t)]^2 \rangle = A |2t|^{2H}$$

soit
$$\mathcal{V}(2t) = 2 \langle V_H(t)V_H(-t) \rangle - 2 \langle V_H(t)^2 \rangle$$

Si on choisit $V_H(0)=0$, on a $\langle V_H(t)^2 \rangle = \langle [V_H(t) - V_H(0)]^2 \rangle = A |t|^{2H}$ et on peut donc déterminer la *fonction de corrélation* :

$$\Gamma(t) = \langle V_H(t)V_H(-t) \rangle / \langle V_H(t)^2 \rangle = 2^{2H-1} - 1. \quad (2.2-10)$$

Elle s'annule pour $H = 1/2$. Si $H > 1/2$ il existe une *corrélation positive* (le mouvement est dit *persistant*) à la fois pour les incréments de $V_H(t)$ et pour sa dérivée le bruit gaussien fractionnaire. Pour $H < 1/2$ les incréments sont *corrélés négativement* (le mouvement est dit *antipersistant*).

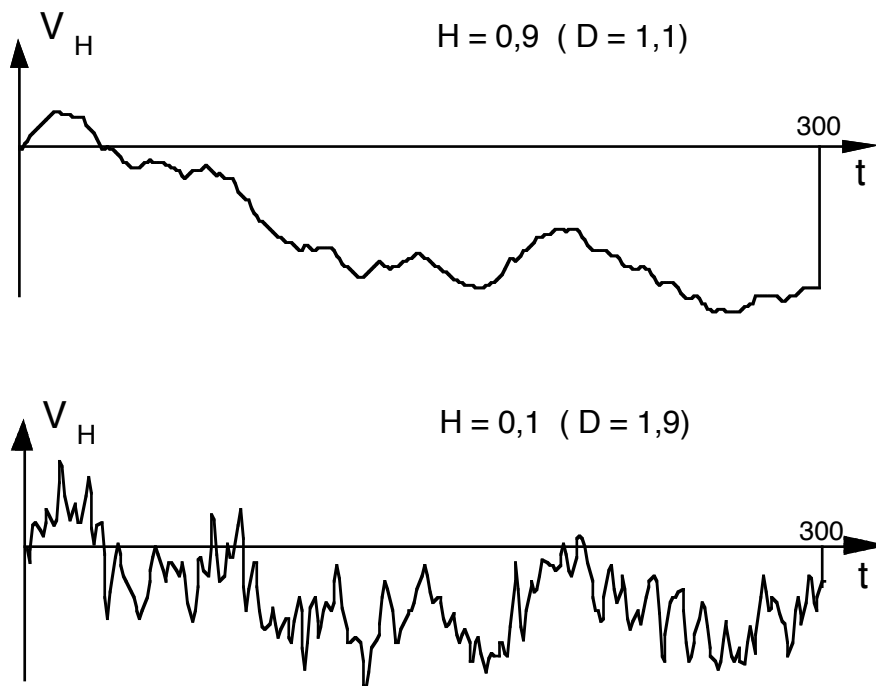


Fig. 2.2.5 Graphes de fonctions browniennes fractionnaires. Dans le graphe du haut la fonction est persistante ($H > 1/2$), dans celui du bas elle est antipersistante ($H < 1/2$) ; le cas brownien ($H = 1/2$) correspond à la figure 2.2.2.

Ceci est vrai à toutes les échelles de temps : comme pour les structures autosimilaires $V_H(t)$ présente un comportement statistiques d'échelle (scalant). Si on change t en λt , les incréments ΔV_H changent par un facteur λ^H :

$$\langle \Delta V_H(\lambda t)^2 \rangle \propto \lambda^{2H} \langle \Delta V_H(t)^2 \rangle$$

de sorte que contrairement aux structures autosimilaires, la trace de $V_H(t)$ nécessite un facteur d'échelle différent pour les deux coordonnées (λ pour t et λ^H pour V_H). t joue en effet un rôle particulier, puisqu'à chaque valeur de t il ne correspond qu'une seule valeur de V_H .

Une telle relation d'échelle non isotrope est appelée *auto-affinité* plutôt qu'autosimilarité.

Mouvements browniens construits à partir d'un bruit blanc $W(t)$

Un mouvement brownien V_B peut être engendré par intégration d'un bruit blanc $W(t)$, c'est-à-dire tel que,

$$\langle W(t) W(t') \rangle = w^2 \delta(t - t'), \text{ de sorte que,}$$

$$V_B(t) = \int_{-\infty}^t W(t') dt'$$

ou encore à partir de sauts ou incréments (A_i) indépendants,

$$V_B(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_i \Upsilon(t - t_i)$$

où Υ est une fonction échelon unité.

On peut de même bâtir un mouvement brownien fractionnaire à partir d'un bruit Gaussien fractionnaire en introduisant une corrélation temporelle dans $W(t)$. On calcule l'intégrale :

$$V_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_{-\infty}^t (t-t')^{H-1/2} W(t') dt'$$

Cependant ces intégrales n'existent pas quand $t' \rightarrow \infty$, de sorte qu'en pratique on calcule les incréments entre les temps zéro et t (Mandelbrot et van Ness, 1968)

$$\Delta V_H(t) = V_H(t) - V_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_{-\infty}^t K(t-t') W(t') dt' \quad (2.2-11)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad K(t-t') &= (t-t')^{H-1/2} & \text{si } 0 \leq t' \leq t, \\ &= (t-t')^{H-1/2} - (-t')^{H-1/2} & \text{si } t' < 0. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que dans l'expression précédente $\Delta V_H(\lambda t) = \lambda^H \Delta V_H(t)$ si on remarque que $W(\lambda t) = \lambda^{-1/2} W(t)$ (dérivée d'un mouvement brownien).

2.2.5 Fractales auto-affines

Nous avons vu à propos du mouvement brownien fractionnaire qu'une structure invariante par une loi d'échelle différente suivant les différents axes était appelée *auto-affine*. Très généralement, si pour une courbe fractale auto-affine $V(t)$ du plan $\{V,t\}$ on considère un intervalle $\Delta t = 1$ correspondant à une variation verticale $\Delta V = 1$, alors V est auto-affine si le changement $\Delta t \rightarrow \lambda \Delta t$ transforme ΔV en $\lambda^H \Delta V$ avec H est différent de un.

Prenons par exemple $\lambda = 1/5$ et $\lambda^H = 1/3$, et considérons la fractale déterministe construite de la manière suivante : chaque segment diagonal d'un rectangle est remplacé à l'itération suivante, par la ligne brisée formée de 5 nouveaux segments inscrits dans un rectangle 5×3 , et dont les extrémités coïncident avec celles du segment initial (figure 2.2.6).

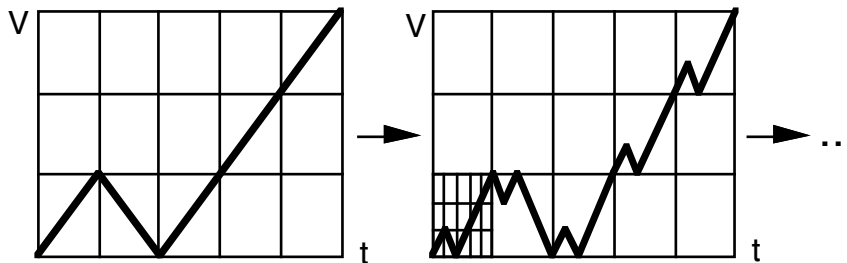


Fig. 2.2.6 Construction d'une courbe fractale présentant une affinité interne. Chaque segment, diagonale d'un rectangle, est remplacé par le générateur formé de 5 nouveaux segments.

Relation entre D et H pour le mouvement brownien fractionnaire

On voit que par construction cette ligne brisée supposée étendue à l'infini (rectangle initial aussi grand que l'on veut et itérations poursuivies à l'infini) présente une invariance par dilatation (ou contraction) d'un facteur 5 suivant l'axe t et 3 suivant l'axe V . Calculons sa dimension fractale.

Si on divise Δt en n parts, soit $\Delta t' = 1/n$ (ici $n = 5, 5^2, \dots$), ΔV est divisé en n^H parts, soit $\Delta V' = 1/n^H$ (ici $n^H = 3, 3^2, \dots$). Définissons la dimension fractale par la méthode des boîtes : on recouvre les portions de courbe $\Delta V'$ par $(1/n^H)/(1/n)$ boîtes carrées de côté $1/n$ (à quelques fluctuations d'ordre supérieur près), et on répète l'opération n fois selon l'axe t , soit donc au total $N(n) = n \times (n/n^H)$ boîtes. On obtient donc une loi de puissance $N(n) = n^{2-H}$ pour le nombre de boîtes en fonction de leur taille, ce qui correspond (voir le § 1.3.3) à une *dimension fractale*

$$\boxed{D = 2 - H} \quad \text{avec } 0 < H < 1. \quad (2.2-12)$$

Dans l'exemple ci-dessus, $H = \log 3 / \log 5$ de sorte que $D \cong 1,32$. De même la courbe auto-affine du mouvement brownien scalaire ordinaire ($H = 1/2$) a

pour dimension $D = 1,5$ (fig. 2.2.2) ; enfin les dimensions sont respectivement $D = 1,1$ et $D = 1,9$ pour les courbes de la figure 2.2.5.

L'ensemble zéro du mouvement brownien fractionnaire est par définition l'intersection de son graphe avec l'axe des t , ensemble des points tels que $V_H(t) = 0$ (ou plus généralement tels que $V_H(t) - V_H(t_0) = 0$). Dans le cas présent, l'ensemble zéro est un ensemble de points de dimension topologique zéro et de dimension fractale $D_0 = D - 1 = 1 - H$: comme $0 < D_0 < 1$, c'est une poussière fractale.

Il est maintenant possible de faire le lien entre le mouvement brownien scalaire des gains d'un joueur dont la dimension est $D = 3/2$, et la distribution des temps de gain nul est une poussière de Cantor qui a pour dimension $D_0 = D - 1 = 1/2$ (figure 2.2.2).

Généralisation à d dimensions

On peut de même définir une fonction brownienne fractionnaire sur un espace à d dimensions euclidiennes. Elle est tel que

$$\langle [V_H(x'_1 \dots x'_d) - V_H(x_1 \dots x_d)]^2 \rangle \propto [|x'_1 - x_1|^2 + \dots + |x'_d - x_d|^2]^H \quad (2.2-13)$$

L'hypersurface engendrée par les points $\{x_1, \dots, x_d, V_H\}$ est une fractale auto-affine de dimension fractale,

$$D = d + 1 - H \quad (2.2-14)$$

et de dimension topologique $d_T = d$.

De plus, alors que $V_H(x_1, x_2, \dots, x_d)$ est auto-affine, l'ensemble zéro c'est-à-dire la coupe par un plan parallèle à l'espace des $\{x_1, \dots, x_d\}$ est *autosimilaire* comme on peut aisément le vérifier. Sa dimension est,

$$D_0 = d - H \quad (2.2-15)$$

Remarque : Si l'on calcule la dimension par la méthode du compas, on trouve une toute autre valeur appelée *dimension latente*. Pour déterminer cette dimension D_c correspondant à des pas ε , on écrit que,

$$\varepsilon^2 = \lambda^2 \Delta t^2 + \lambda^{2H} \Delta V^2$$

Quand $\Delta V / \Delta t$ est suffisamment grand, $\varepsilon \propto \lambda^H$
 La longueur totale de la mesure avec des pas ε , est $N\varepsilon$ où N est le nombre de pas.
 Pour un graphe de taille T où $t \in [0, T]$, $N = T/(\lambda \Delta t)$ et

$$\mathcal{L} = N\varepsilon \propto \lambda^{H-1} \propto \varepsilon^{1-1/H}$$

En se reportant à la section 1.4, équation (1.4-1) on voit que la *dimension fractale latente* est

$$D_c = 1 / H$$

Dimension globale

La dimension « locale » $D = d - H$ que nous venons de déterminer n'est cependant pas la seule dimension attachée à la fractale auto-affine. En effet considérons un massif montagneux et admettons (voir plus bas) qu'il soit une bonne représentation d'une fractale auto-affine dans un espace à $d(= 2) + 1$ dimensions. D'après ce qui précède, localement (pour un randonneur contemplant le spectacle) on observera une dimension fractale donnée par $D = 3 - H$. Cependant, survolé à assez haute altitude, seul l'aspect global de la surface du sol sera apparent et la *dimension globale* (Mandelbrot dans Pietronero & Tossati, 1986) sera $D = 2$.

Essayons de préciser cette notion. Nous savons que les fluctuations de $V(x_1, \dots, x_d)$ varient avec la distance R comme R^H (définition du mouvement brownien fractionnaire). Ainsi, si nous mesurons la dimension fractale avec des boîtes carrées de taille $\varepsilon > \chi$ où χ est tel que $\chi \equiv \chi^H$, l'effet des variations d'altitude ne sera plus pertinent car comme $H < 1$ l'amplitude ε^H des fluctuations de la courbe auto-affine croît plus lentement que ε . La dimension obtenue sera seulement $D = d$. Sur l'exemple de la figure 2.2.7, (pour lequel $d = 1$), les fluctuations en t^H sont représentées par la courbe enveloppe. Les boîtes de taille égale (ou supérieure) à χ , conduisent à une dimension égale à un, car le nombre de boîtes couvrant l'objet est alors proportionnel à t : si on considère par exemple un intervalle $\Delta t = 4\chi$, on couvre la portion de courbe $V_H(t)$ avec 4 carrés de côté $\varepsilon = \chi$ et avec 2 carrés de côté $\varepsilon = 2\chi$, soit approximativement $4/n$ pour $\varepsilon = n\chi$, alors qu'il faut 12 carrés si $\varepsilon = \chi/2$, et qu'il en faudrait de l'ordre de $4n^{1,32}$ pour $\varepsilon = \chi/n$, n étant grand.

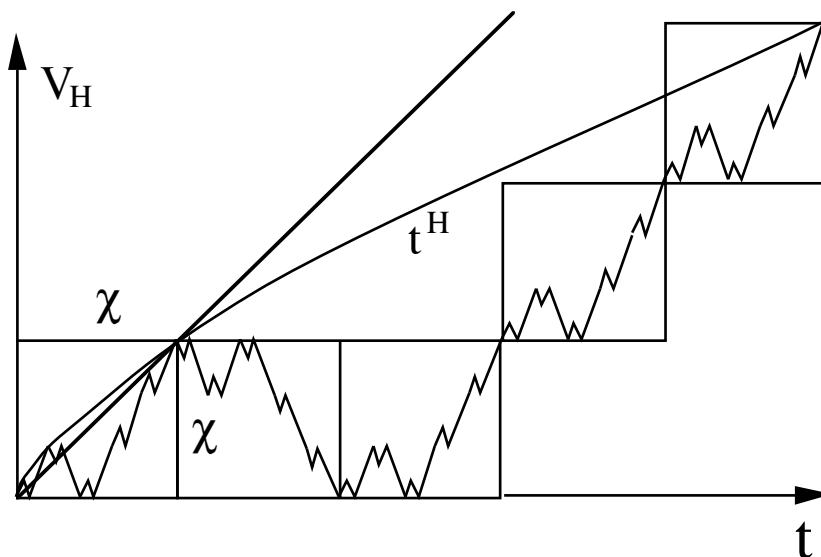


Fig. 2.2.7 Dimension locale et dimension globale d'une structure auto-affine. Pour des distances inférieures à χ , la structure est fractale de dimension 1,32..., mais au-delà la structure devient unidimensionnelle puisque $0 < H < 1$.

Dimension de la trace

Nous avons vu au § 2.2.1, que la trace d'un mouvement brownien (ou vol brownien) avait, quelle que soit la dimension d de l'espace, une structure *auto-similaire* de dimension $D = 2$. On peut maintenant se poser la question de déterminer la dimension fractale de la trace d'un mouvement brownien fractionnaire. La trace est par définition formée de t pas aléatoires en direction et de longueur $\Delta V_H(t)$.

En utilisant la méthode des boîtes (mais les autres méthodes de mesure donneraient la même dimension) on peut voir simplement que la dimension de la trace est précisément la dimension latente obtenue pour la fonction brownienne par la méthode du compas (cf. la *remarque* ci-dessus)

$$D(\text{trace}) = 1/H \quad (2.2-16a)$$

En particulier, on vérifie que le mouvement brownien, qui correspond à $H = 1/2$, a bien une trace de dimension 2, et que le mouvement brownien fractionnaire très persistant ($H \cong 1$) a une dimension $D \cong 1$.

On notera également que les points multiples deviennent dominants quand $H < 1/d$, la trace devenant alors dense dans l'espace :

$$D(\text{trace}) = d \quad \text{si } H < 1/d \quad (2.2-16b)$$

Autres ensembles auto-affines

Nous nous sommes limités dans ce qui précède à la description de courbes auto-affines en relation avec le mouvement brownien fractionnaire. L'affinité interne peut également concerner des objets de structure bien plus générale. Le générateur défini par la figure 2.2.8 donne un exemple d'une structure auto-affine qui n'est pas une courbe $V(t)$. La dimension fractale calculée par la méthode des boîtes de manière analogue au cas de la figure 2.2.6 conduit la plupart du temps à une valeur différente de la dimension de Hausdorff.

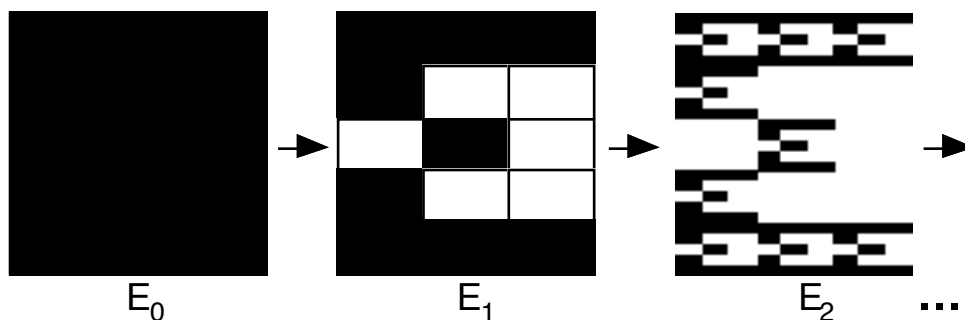


Fig. 2.2.8 Deux premières itérations d'une fractale auto-affine : E_0 est l'initiateur, E_1 est le générateur (identique à la première itération), E_2 correspond à la deuxième itération...

Si on considère très généralement un carré unité E_0 (initiateur) que l'on divise en un réseau $p \times q$ de rectangles de côté $1/p$ et $1/q$ ($p < q$), et si on sélectionne dans ce réseau un ensemble E_1 (générateur) de rectangles, le nombre de rectangles sélectionnés dans chaque colonne $1 \leq j \leq p$ étant désigné par N_j , alors après une infinité d'itérations aboutissant à l'ensemble limite E , on obtient (Falconer, 1990) :

- pour la dimension de Hausdorff,

$$\dim E = \log \left(\sum_{j=1}^p N_j^{\log p / \log q} \right) \frac{1}{\log p}$$

- pour la dimension de boîtes,

$$\Delta(E) = \frac{\log p_1}{\log p} + \log \left(\frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^p N_j \right) \frac{1}{\log q}$$

où p_1 est le nombre de colonnes contenant au moins un rectangle de E_1 . Dans la figure ci-dessus, $p = 3$, $q = 5$ et $\dim E = 1,675\dots$ et $\Delta(E) = 1,683\dots$

Pour une discussion plus détaillée et divers exemples de fractales auto-affines on pourra se reporter par exemple à Falconer, 1990, Barnsley, 1988, Mandelbrot, 1982.

2.2.6 Reliefs montagneux

Sans entrer dans l'explication physique du caractère fractal d'un relief qui n'est pas encore clairement compris (voir le § 2.2.9 sur les fractures), nous nous limiterons ici à l'impression visuelle. Les quatre images de la figure

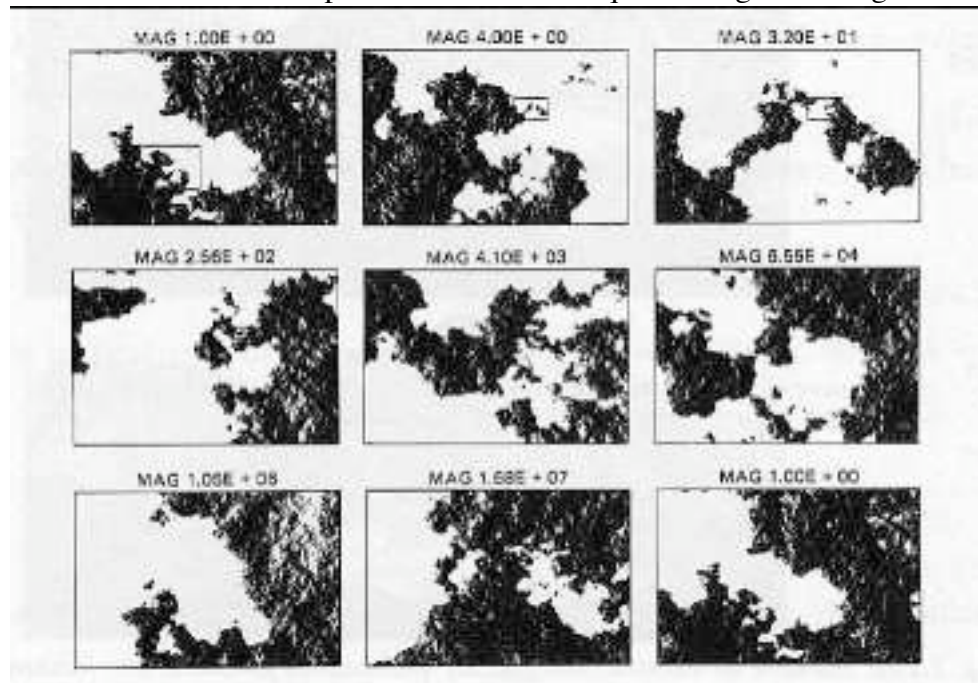


Fig. 2.2.9 Cette séquence représente un paysage fractal, statistiquement autosimilaire (le paysage a une dimension $D = 2,2$) pour divers agrandissements allant de 1 à plus de 16 millions. A noter que la génération statistique a été astucieusement programmée de manière à retrouver l'image initiale (Voss dans Peitgen et Saupe, 1988)

(2.2.10) simulent un relief montagneux à partir d'une fonction brownienne d'un point associé à une dimension fractale déterminée allant de 2,1 à 2,5. On peut les construire par transformée de Fourier d'une distribution en $1/f^\beta$.

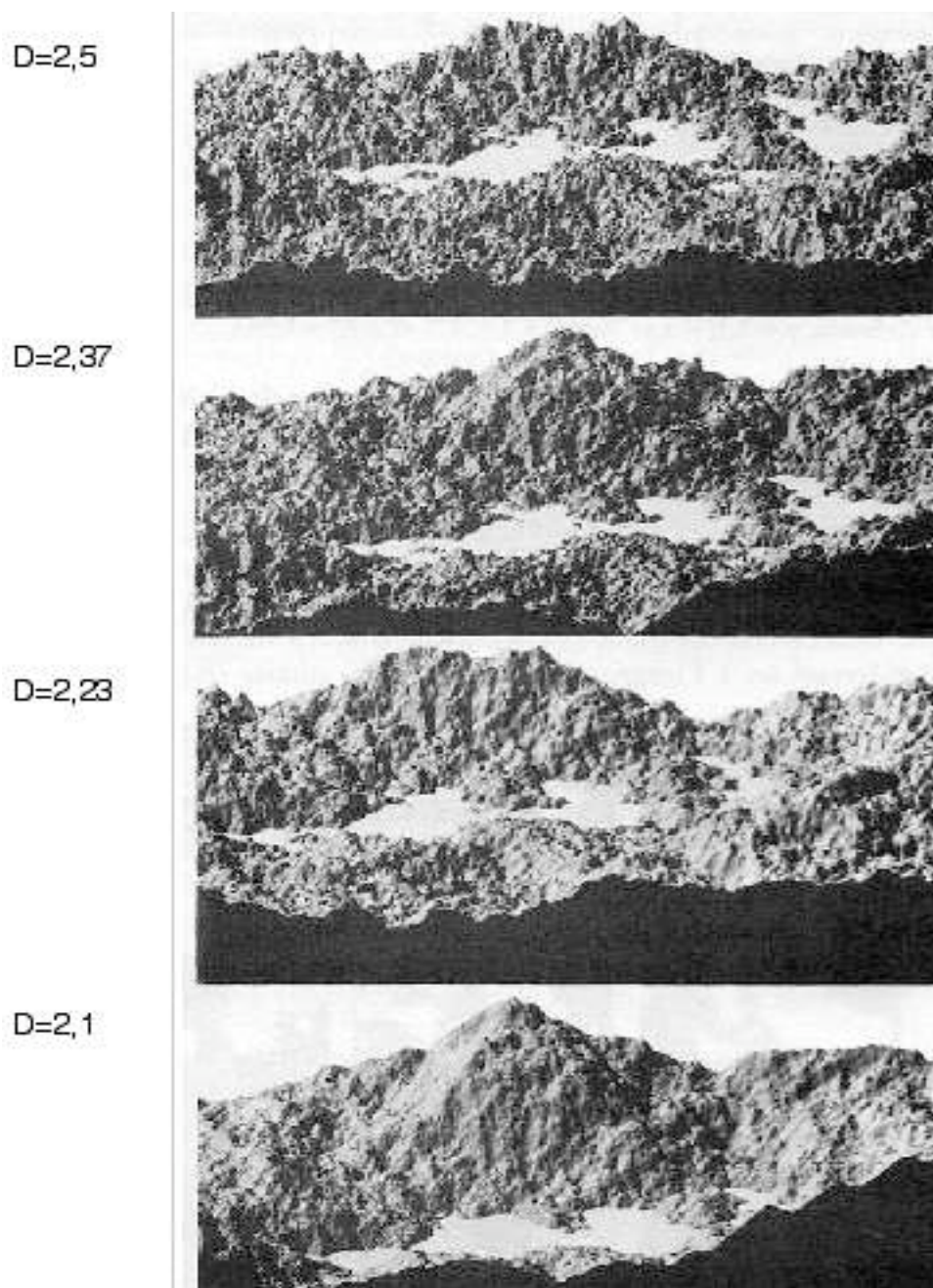


Fig. 2.2.10 Exemple de construction fractale utilisant les fonctions browniennes fractionnaires affines : dans l'espace $d = 3$ constructions simulant le relief (Mandelbrot, 1982).

On peut également construire des nuages artificiels en utilisant la construction dans $d = 4$ (les trois coordonnées spatiales et un paramètre représentant la densité de vapeur d'eau), « l'ensemble zéro » étant alors une section dans $d = 3$ qui simule très correctement la structure géométriques des formations nuageuses (voir le § 2.2.8). On peut remarquer enfin que beaucoup de phénomènes naturels ont un H voisin de 0,8.

2.2.7 Densité spectrale d'un mouvement brownien fractionnaire L'exposant spectral β

Soit une fonction aléatoire $V(t)$. On peut la caractériser par sa *densité spectrale* $S_v(f)$. $S_v(f)$ est le carré moyen de $V(f)$ par unité de largeur de bande par exemple à la sortie d'un filtre de $V(f)$, de largeur Δf autour de f (voir par exemple A. Van der Ziel, 1970):

$$S_v(f) = \langle |V(f)|^2 \rangle / \Delta f \quad (2.2-17a)$$

S_v fournit donc des informations sur le temps de corrélations caractérisant $V(t)$. Si l'on définit la transformée de Fourier $V(f, T)$ de $V(t)$ pour $0 < t < T$ par,

$$V(f, T) = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) e^{2\pi i f t} dt$$

$$\text{alors} \quad S_v(f) \propto T \langle |V(f, T)|^2 \rangle \quad (2.2-17b)$$

On peut également relier la densité spectrale à la *fonction de corrélation* à deux points de $V(t)$:

$$G_v(\tau) = \langle V(t) V(t + \tau) \rangle - \langle V(t) \rangle^2 \quad (2.2-18)$$

Quand le théorème de Wiener-Khintchine s'applique (il faut que la fonction de corrélation décroisse assez vite à l'infini) on a

$$G_v(\tau) = \int_0^\infty S_v(f) \cos(2\pi f \tau) df \quad (2.2-19)$$

En particulier pour un bruit Gaussien $S_v(f) = \text{constante}$, et $G_v(\tau) = \Delta V^2 \delta(\tau)$ est complètement décorrélé. De même pour une loi de puissance

$$\begin{aligned} S_v(f) &\propto 1/f^\beta \quad \text{avec } 0 < \beta < 1 \text{ on a,} \\ G_v(\tau) &\propto \tau^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Comme on peut également écrire que

$$\langle |V(t+\tau) - V(t)|^2 \rangle = 2 [\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2] - 2G_v(\tau)$$

on en déduit pour un mouvement brownien fractionnaire $V_H(t)$, la relation :

$$\boxed{\beta = 2H+1} \quad (H \neq 0) \quad (2.2-20)$$

Le mouvement brownien $V_H(t)$ en dimension d , a une dimension fractale D et une densité spectrale $S_v(f) \propto 1/f^\beta$ telles que $D = d + 1 - H = d + (3 - \beta)/2$.

On voit d'après les développements précédents que l'on peut avantageusement utiliser la transformée de Fourier pour construire des fonctions browniennes fractionnaires.

Musique fractale

Signalons ici une découverte très intéressante de Voss & Clarke (Voss, 1988) concernant la densité spectrale des musiques composées dans différentes civilisations et à différentes époques : fait remarquable celle-ci est approximativement en $1/f$.

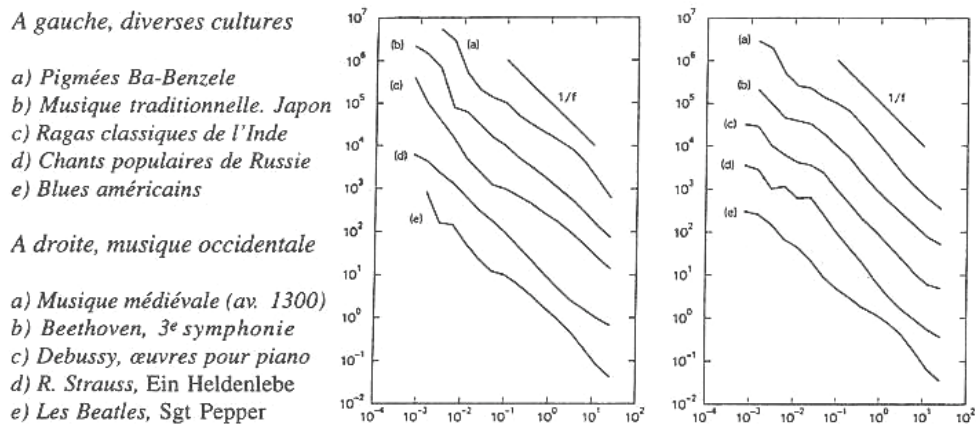


Fig. 2.2.11 Spectre de fréquence de diverses musiques provenant de plusieurs époques et de cultures variées (f en Hertz). Elles se rapprochent assez d'un comportement en $1/f$ (d'après Voss, 1988).

On peut construire artificiellement sans grande difficulté une musique aléatoire : si on la contraint à être un bruit blanc⁷ elle apparaît trop aléatoire, brownienne (bruit en $1/f^2$), elle est trop corrélée et semble un peu monotone, en $1/f$ elle devient plus agréable à écouter. La distribution spectrale en $1/f$ correspond apparemment à la physiologie naturelle ; c'est une distribution intermédiaire entre l'aléatoire (bruit blanc) et le presque prévisible (bruit brownien). Les « compositions » de la figure 2.2.12, très aisées à construire, utilisent des distributions aléatoires à la fois sur la durée et la hauteur des notes. Bien sûr elles ne peuvent prétendre fournir plus qu'une impression générale.



(a) bruit blanc

⁷ Un bruit blanc sur un large spectre de fréquences ressemble au bruit de la vapeur sous pression sortant d'une chaudière. Pour une musique aléatoire la bande de fréquences est bien plus étroite puisqu'on utilise la gamme usuelle.



Fig. 2.2.12 Exemples de musiques aléatoires générées sur ordinateur (Voss, 1988).

2.2.8 Nuages

En 1982 Lovejoy a étudié la forme des nuages et a montré qu'ils présentaient une structure fractale sur plus de 4 échelles de grandeur (de 10 à 10^4 km). La relation donnant l'aire ($S \propto R^2$) en fonction du périmètre ($P \propto R^D$) est une loi de puissance ($S \propto P^{2/D}$) donnant un exposant D voisin de 1,33.

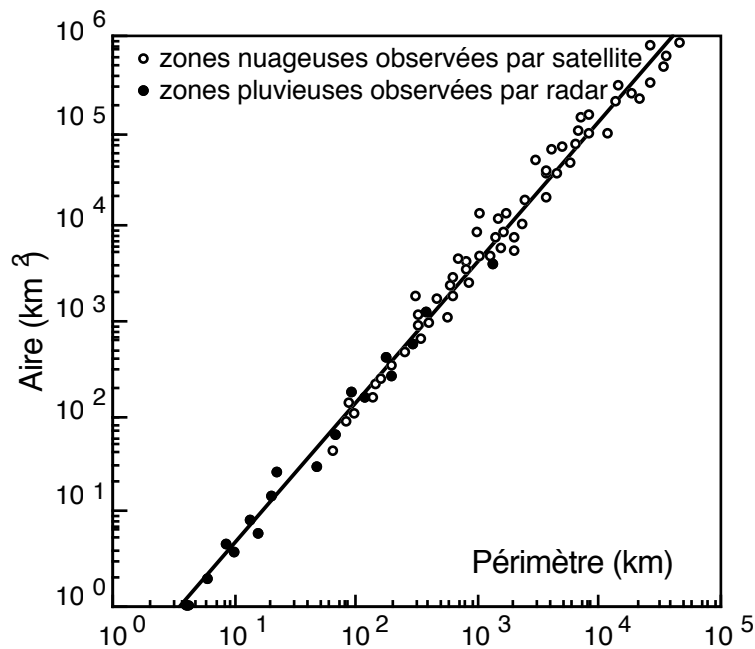


Fig. 2.2.13 Analyse de la relation entre l'aire de nuages, variant comme R^2 où R est une longueur caractéristique allant de l'ordre du km à quelques centaines de km, et leur périmètre (Lovejoy, 1982).

Les mesures ont été faites à partir d'images radar et d'images satellites. L'analyse (Rys et Waldvogel, 1986) de données « radar » sur les nuages d'orage de grêle (très convectifs) donne également une dimension de Hausdorff de leur périmètre de l'ordre de $D = 1,36 \pm 0,1$. Le caractère fractal des nuages en permet une simulation numérique sur ordinateurs très convaincante et utile. Quand à la raison physique sous-jacente elle est liée à la diffusion turbulente (voir section 2.3).

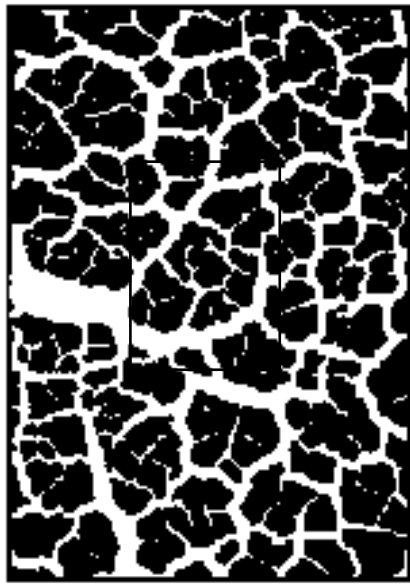
2.2.9 Fractures

Tout le monde a pu remarquer qu'une macrographie de la surface d'une pierre brisée pouvait être indiscernable d'une photographie de falaise ou de face montagneuse si aucun objet identifiable n'était là pour fixer l'échelle. L'invariance par dilatation est ici clairement présente. Des arguments semi-empiriques et de nombreuses mesures suggèrent que les surfaces de fracture dans les métaux peuvent avoir un caractère fractal. Ces caractéristiques sont à rapprocher des structures fractales du relief et s'apparentent également à la rupture diélectrique ainsi d'ailleurs qu'à l'agrégation limitée par diffusion (que nous discuterons au § 3.4.5 et dans la section 4.2).

On peut en gros classer les fractures en deux types : les ruptures *fragiles* dans lesquelles le matériau casse sans se déformer, comme une faïence tombant sur un sol dur, et les ruptures *ductiles* dans lesquelles le matériau se déforme de manière très importante avant de se rompre.

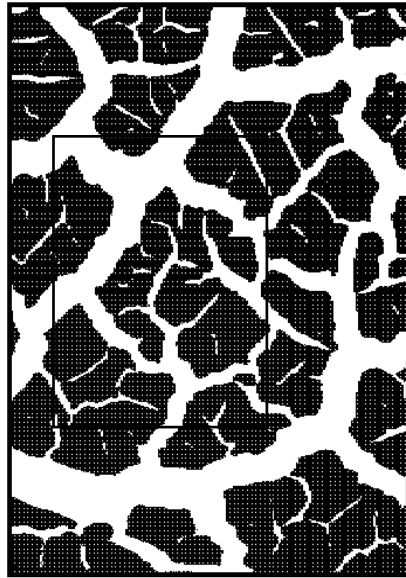
Expérimentalement, des études de fracture de couches minces ont été simulées par Skjeltorp en Norvège (Skjeltorp, 1988). Ces travaux sont très intéressants par la qualité de leur mise en œuvre : l'expérience consiste à fabriquer des monocouches de microsphères (sphères de polystyrène sulfoné⁸ de diamètre $3,4 \pm 0,03 \mu\text{m}$) dispersées dans l'eau. En les confinant entre deux plaques planes en verre, il est possible de former un polycristal bidimensionnel dont la taille des « grains » monocristallins est raisonnablement grande (10^5 à 10^6 billes). Si on fait sécher très lentement une telle couche, le diamètre des sphères se contracte jusqu'à $2,7 \mu\text{m}$. Des contraintes entre sphères apparaissent car celles-ci ont tendance à rester collées entre elles, tandis que les contraintes entre sphères et plaques de verre restent négligeables. Comme aucune préfracture n'a été faite en bord de couche, des craquelures prenant source sur les défauts apparaissent dans tout l'échantillon. Leur nombre augmente au fur et à mesure du séchage par une succession de branchements hiérarchiques. Les contraintes du système diminuent dans les régions de taille plus petite non encore fracturées, et donc le diamètre des cassures. Les figures 2.2.14 (a-d) montre divers grossissements de la couche craquelée. La distribution des craquelures est bien fractale sur plus de deux ordres de grandeur (figure 2.2.15) comme le montre une analyse par la méthode des boîtes (N boîtes de taille ϵ),

⁸ La sulfonation permet d'obtenir des sphères se contractant au séchage.



200 μm

(a)



100 μm

(b)



50 μm

(c)



20 μm

(d)

Fig. 2.2.14 Structure finale d'une monocouche fracturée à divers grossissements (Skjeltorp, 1988, reproduit avec la permission de Kluwer Academic Publishers).

$$N \propto \varepsilon^{-D}$$

recouvrant les craquelures sur les quatre grossissements de la figure 2.2.14.

Les fractures sont très souvent initialisées par un défaut (préfracture...) en

surface ; une fracture isolée traverse alors l'échantillon. Dans le cas des couches, la fracture est une courbe dont l'analyse précédente (qui concerne une fracturation dans la masse) ne révèle pas la structure. Dans le cas d'un volume, ce type de fracture est une surface semblable à une fractale auto-affine. L'analyse quantitative en termes de fractales n'a commencé que ces dernières années. Mandelbrot, Passoja et Paullay (1984) furent les premiers à utiliser la notion de fractale pour décrire les surfaces métalliques fracturées ; la rupture est alors celle d'un matériau ductile. D'autres mesures sur des surfaces de titane ont ensuite été faites par Pande *et al.* (1987). La rugosité des surfaces fracturées a également été utilisée par Davidson (1989) comme mesure de la dureté et de la résistance à la fatigue de matériaux. Les expériences les plus récentes ont été faites sur des échantillons de métaux ayant des duretés différentes (alliages d'aluminium avec des traitements thermiques différents, la rupture est ductile). Curieusement, dans cette expérience la même dimension fractale $D \cong 2,2$ a été obtenue pour ces échantillons, ce qui pose le problème de la relation entre dureté et dimension fractale suggérée par Davidson. Comme pour les travaux de Mandelbrot *et al.* (1984), la dimension fractale est mesurée en pratiquant une série de coupes parallèles à la fracture après que la partie fracturée ait été recouverte de nickel, ceci afin de permettre le polissage sans altérer la surface (E. Bouchaud *et al.*, 1990). Dans tous les cas, les conditions expérimentales (contraintes appliquées anisotropes et préfracturation) sont telles que la partie fracturée possède une symétrie auto-affine. Les dimensions fractales dans les plans parallèles à la fracture ont été mesurées soit par la méthode des boîtes, soit encore par la relation *périmètre-aire*. Cette relation utilise simplement le fait qu'une coupe de surface S

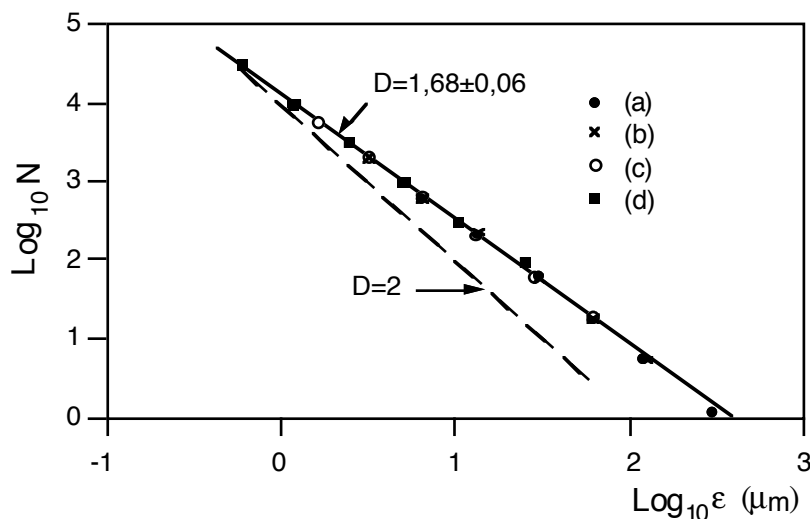


Fig. 2.2.15 Détermination de la dimension fractale D de la structure fracturée d'une monocouche de microsphères; la méthode des boîtes a été utilisée sur les quatre agrandissements (a-d) de la figure 2.2.14. (d'après Skjeltorp, 1988).

du matériau fracturé (en noir sur la figure 2.2.16) n'est pas fractale et varie donc comme R^2 où R est le diamètre moyen de S . Le périmètre P , de cette coupe varie lui comme R^{D-1} , la fracture étant supposée de dimension D , d'où une relation entre périmètre et aire, $P \propto S^{(D-1)/2}$, permettant de calculer D .

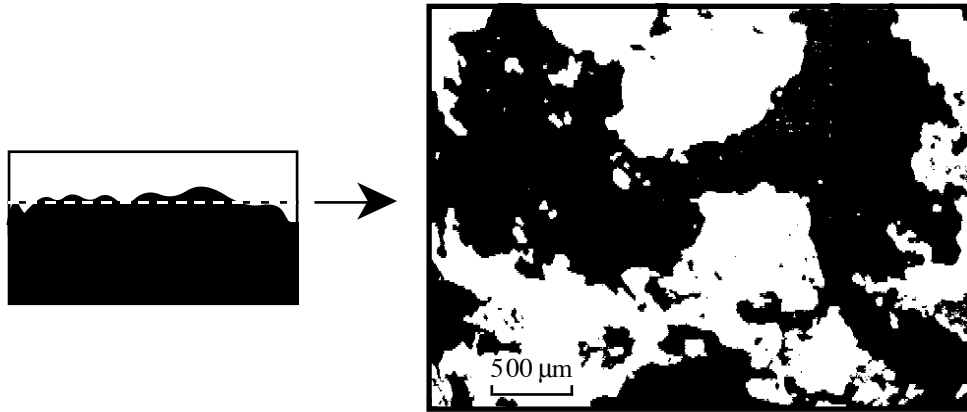


Fig. 2.2.16 Coupe d'une fracture d'un alliage d'aluminium (en noir). La fracture est recouverte de nickel (en blanc) avant d'effectuer la coupe (Bouchaud et al., 1990).

Toutes ces études sont malheureusement pour l'instant essentiellement descriptives : les raisons physiques de la fractalité des cassures sont loin d'être comprises, en particulier en trois dimensions, et on ne connaît pas de relation claire entre la dimension fractale et les propriétés mécaniques. La difficulté principale vient du fait que même pour un matériau homogène idéal, un champ compliqué de contraintes non locales se développe lorsque le matériau commence à se rompre.

Le point de départ d'un modèle théorique est l'équation des contraintes \vec{u} dans un milieu continu élastique,

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} = 0 \quad (2.2-21)$$

λ et μ étant les coefficients de Lamé. On admet alors que la probabilité de rupture d'une partie donnée de l'échantillon est proportionnelle à une puissance η de la contrainte à laquelle il est soumis (Louis *et al.*, 1986).

Les lois d'échelle de la fracture ont été obtenues numériquement, mais seulement dans les systèmes bidimensionnels (de Arcangélis *et al.*, 1989). Le modèle est constitué d'un réseau de liens fragiles qui se rompent lorsque la force qui s'y exerce dépasse un certain seuil. Les seuils de rupture des liens sont choisis au hasard selon une loi de probabilité définie. Fait remarquable, ces auteurs ont trouvé que ce matériau fragile présentait une dimension fractale indépendante de la loi de distribution des seuils de rupture, c'est-à-dire de la nature du matériau (fragile) en accord avec les résultats expérimentaux de Bouchaud *et al.* concernant un matériau ductile. Guinea et Louis ont d'autre part trouvé que les liens brisés d'un réseau élastique formaient une fractale de dimension

$D = 1,25$. Il est cependant prématuré pour l'instant d'affirmer que la fracture obéit à des lois universelles.

Au moment où sont écrites ces lignes, aucune étude concluante n'a pu être faite en trois dimensions.

2.3 Turbulence et chaos

La plupart des écoulements qui apparaissent dans la nature sont turbulents. C'est le cas de la couche limite de l'atmosphère terrestre, des « *jet streams* » de la haute troposphère, des cumulus, des courants marins comme le *Gulf Stream*. C'est également le cas de la photosphère du soleil et des étoiles analogues, des nébuleuses gazeuses interstellaires, mais aussi à plus petite échelle des couches limites sur les ailes des avions, des courants dans les rivières, de la fumée qui s'élève. La turbulence est utilisée pour mélanger ou homogénéiser des fluides et accélérer les réactions chimiques. Les différents modes d'apparition de la turbulence ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières années. Nous ne donnerons ici qu'un bref aperçu destiné à en faire saisir la nature fractale. Les systèmes possédant un grand nombre de degrés de liberté donne naissance à la « turbulence forte » mais une des grandes découvertes de ces dernières décennies a été de réaliser qu'il suffisait de trois degrés de liberté pour permettre l'apparition du chaos⁹ (Ruelle & Takens, 1971). On engendre ainsi de la « turbulence faible ». Des équations simples mais non linéaires sont alors à la source de ce *chaos*, dit dans ce cas *déterministe* (Schuster, 1984 ; Bergé *et al.*, 1988), car on peut en principe calculer l'état du système à tout instant connaissant l'état initial et les équations d'évolution. Nous examinerons un peu plus en détail plus loin quelques exemples de phénomène engendrant un chaos déterministe.

2.3.1 Modèles fractals de la turbulence développée

Dans un fluide dont la viscosité est faible, le mouvement d'une petite portion de fluide est soumis à si peu de résistances qu'une perturbation infime peut s'amplifier et conduire par une succession d'instabilités à un mouvement désordonné qualifié de turbulent.

La turbulence naît de l'interaction entre un grand nombre de tourbillons conjointement avec un développement rapide de la *vorticité* (caractérisant les tourbillons dont l'intensité est $|\vec{\omega}|$) d'un fluide,

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \quad (2.3-1)$$

\vec{v} étant le champ des vitesses dans le fluide. Ce champ de vitesses est lui

⁹ Pour les physiciens de ce domaine, le mot « chaos » a un sens relativement précis : il concerne l'aspect *temporel imprévisible* d'un phénomène (qui est alors dit chaotique). Le mot « turbulence » est lui plus approprié au comportement spatio-temporel.

même régit par l'équation de Navier-Stokes (qui n'est autre que l'équation de Newton $\vec{F} = m d\vec{v}/dt$, appliquée à un élément de fluide). Quand les tourbillons s'étendent à toutes les échelles, on dit que l'on a affaire à de la *turbulence développée*¹⁰. Cette hiérarchie de tourbillons avait été suggérée dès 1922 par Richardson sous la forme d'un sonnet inspiré d'un poème de l'auteur du voyage de Gulliver (cité dans l'avant-propos) :

« Les gros tourbillons ont de petits tourbillons
 Qui se nourrissent de leur vitesse
 Et les petits tourbillons en ont de plus petits
 Et c'est ainsi jusqu'à la viscosité. »

Le mécanisme supposé à l'origine de cette structuration hiérarchique, mais ce n'est encore qu'une hypothèse, réside dans le fait que les tourbillons d'une taille donnée se déstabilisent pour engendrer des tourbillons de taille plus petite. Ceci se poursuit jusqu'à une taille minimale où les tourbillons deviennent stables. L'échelle correspondante où la viscosité est suffisante pour dissiper l'énergie est appelée l'échelle de Kolmogorov. Le paramètre qui contrôle la turbulence est le nombre de Reynolds Re ,

$$Re = UL/v_0 \quad (2.3-2)$$

où U est une vitesse caractéristique du fluide, L la taille de l'objet engendrant la turbulence et v_0 la viscosité cinématique du fluide ($v_0 = \mu/\rho$, μ étant la viscosité et ρ la densité). L'équation de Navier-Stokes s'écrit,

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \text{grad} p = \vec{f} + \mu \Delta \vec{v} \quad (2.3-3)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0.$$

A ces équations il faut ajouter les conditions initiales et aux limites.

La dernière équation est l'équation de conservation de la matière, elle suppose que toutes les vitesses sont petites devant la vitesse du son ; \vec{f} est la force extérieure éventuellement appliquée, p est la pression dans le fluide, ρ sa masse volumique. L'équation de Navier-Stokes ne dépend en pratique que de Re , via le rapport entre le terme d'advection $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$, et le terme de dissipation $(\mu/\rho) \Delta \vec{v}$. Lorsque la viscosité s'annule ($Re = \infty$), l'équation devient une équation d'Euler qui conserve l'énergie. Nous n'analyserons pas plus avant l'équation de Navier-Stokes, mais noterons cependant que l'on peut écrire une équation du mouvement des tourbillons en la combinant¹¹ avec l'équation définissant $\vec{\omega}$; on constate alors que le comportement de la *turbulence bidimensionnelle* est très particulier car en dimension 2, les vecteurs $\vec{\omega}$ restent orthogonaux au champ des vitesses. Ceci est par exemple important pour ce qui concerne les mouvements de l'atmosphère : la turbulence est en gros tridimensionnelle jusqu'à une échelle de 100 km, puis bidimensionnelle de 100 à 1000 km, enfin la sphéricité de la terre se fait sentir au dessus de 1000 km.

¹⁰ On trouvera une introduction à la turbulence développée dans l'article de M. Lesieur, *La Recherche*, décembre 1982.

¹¹ En prenant son rotationnel on élimine les termes de pression.

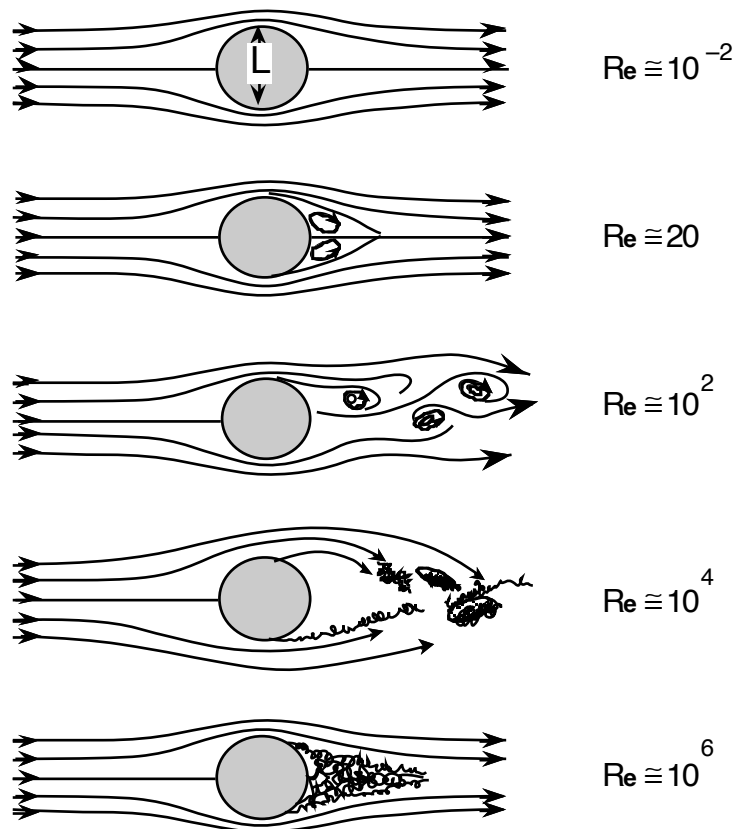


Fig. 2.3.1 Passage progressif à la turbulence à l'arrière d'un cylindre de taille L , lorsque la vitesse U (donc Re), est progressivement augmentée (D'après Paladin et Vulpiani (1987)).

Les grosses structures tourbillonnaires de l'atmosphère terrestre ont des tailles de plusieurs milliers de kilomètres alors que l'échelle où a lieu la dissipation (échelle de Kolmogorov) est de l'ordre du millimètre.

La turbulence devient pleinement développée pour des valeurs du nombre de Reynolds supérieures à une valeur critique Re_{crit} ($\cong 2\,000$ dans les expériences de Reynolds¹²), la turbulence apparaissant elle-même pour des valeurs de $Re \cong 10$ à $1\,000$ selon la géométrie, succédant à la phase laminaire présente aux basses valeurs de Re . Dans la phase laminaire il existe toujours de petites fluctuations (turbulence résiduelle), mais celles-ci sont rapidement amorties. Dans la phase turbulente au contraire ces fluctuations s'amplifient puis interagissent entre elles de manière inextricable. Ceci se produit lorsque le temps d'amortissement (qui est en L^2/ν_0) d'une perturbation devient plus long que le temps pour qu'une particule de fluide parcoure l'objet de taille L produisant la perturbation (soit L/U). Derrière une grille, la turbulence développée est obtenue pour des valeurs plus basse de Re_{crit} que derrière un cylindre par

¹² La valeur critique dépend de l'expérience, et en particulier du taux de turbulence résiduelle. On a pu ainsi atteindre, en diminuant ce taux, des valeurs de Re_{crit} atteignant quelques 10^5 .

exemple. De plus la turbulence y est relativement homogène et isotrope (voir par exemple Lesieur, 1987).

Le modèle de Kolmogorov (1941)

En 1941, le mathématicien russe Kolmogorov propose un modèle de la turbulence développée tridimensionnelle selon lequel les tourbillons présentent une structure hiérarchique en tailles, l'énergie étant injectée dans les tourbillons de grandes tailles puis transférée de tourbillons en tourbillons dans une cascade de tailles décroissantes jusqu'aux tailles les plus petites où l'énergie se dissipe (l'échelle de Kolmogorov). La théorie de Kolmogorov-Obukhov 1962, prédit en particulier un spectre d'énergie en $k^{-5/3}$ où k est le vecteur d'onde des modes de Fourier du champ des vitesses (l'exposant $5/3$ s'obtient aisément par de simples considérations d'équations aux dimensions). Ces modèles ne sont pas sans analogie avec les cascades de Fournier et Hoyle (§ 2.1.2) : on fait l'hypothèse qu'un tourbillon donne naissance à N sous-tourbillons de taille r fois plus petite au sein desquels la dissipation se concentre. Ceci met en avant une dimension fractale $D = \log N / \log(1/r)$. Pour que la turbulence se développe il faut $D > 2$, de telle sorte qu'une coupe faite au hasard dans l'espace ait une probabilité non nulle de couper le support de la turbulence (Mandelbrot, 1974, 1975b). Mandelbrot a également suggéré en 1976 que les singularités des équations de Navier-Stokes et d'Euler qui régissent la dynamique des écoulements pouvaient avoir une structure fractale (expliquant par là même la nature de la turbulence), mais à l'heure actuelle on ne sait toujours pas si les équations développent des singularités au bout d'un temps fini.

Frisch, Sulem et Nelkin (1979) ont admis l'idée que la dissipation était concentrée sur un domaine de dimension fractale non entière et ont proposé le *modèle β* dans lequel le flux d'énergie¹³ est transféré à une fraction β fixée des tourbillons de taille inférieure (voir la construction¹⁴ au § 1.4.2). Cependant les données expérimentales relatives aux moments des fluctuations de vitesse semblent indiquer que les lois d'échelles à petite distance ne peuvent pas être décrites par une fractale homogène (c'est-à-dire bâtie avec des règles liant les propriétés statistiques à une certaine échelle aux propriétés statistiques à une échelle plus grande). Benzi *et al.* (1984) sur la base des travaux de Novikov, Stewart (1964) et Kraichnan (1974), ont donc introduit les fractales hétérogènes du type de celles que nous avons décrites au § 1.4.2 et dans lesquels les règles liant deux échelles sont établies suivant une certaine loi de probabilité (*modèle β aléatoire*).

La dimension fractale du support de la dissipation est alors de la forme,

$$D = d + \log \langle \beta \rangle / \log 2$$

¹³ Tous ces modèles concernent la turbulence tridimensionnelle. En dimension deux, la grandeur conservée est la moyenne du carré de la vorticité (ou enstrophie) de sorte que l'on a alors une cascade d'enstrophie donnant dans ce cas un comportement en k^{-3} .

¹⁴ L'exemple du § 1.4.2 correspond à $N = r^d \beta$ et $r = 2$. Le modèle β est assez semblable au modèle « *absolute curdling* » introduit par Mandelbrot (Mandelbrot, 1976).

$\langle \beta \rangle$ désignant la moyenne des probabilités de branchement β (§ 1.4.2). Une discussion plus détaillée du modèle peut être trouvée dans l'article de revue de G. Paladin et A. Vulpiani (1987) (voir également Vulpiani dans Pietronero, 1989). Notons cependant le fait important qu'une structure fractale hétérogène a un caractère *multifractal* qui permet, nous allons le voir plus loin, une confrontation plus précise entre la théorie et l'expérience.

La difficulté des études théoriques proviennent du fait que l'écoulement turbulent est un système thermodynamique ouvert, c'est-à-dire non isolé de l'extérieur à cause des forces agissant sur l'écoulement, soit à grande échelle (forces extérieures) soit à petite échelle (viscosité) et seulement dans les échelles intermédiaires on peut supposer que l'énergie est transférée entre les différents degrés de liberté, ceci de façon conservative. Parmi les exemples de flots turbulents, la turbulence derrière une grille se prête assez bien aux idéalizations théoriques (turbulence homogène et isotrope, modèles β) parce qu'on peut estimer ici qu'il n'y a pas d'extraction d'énergie par la turbulence à partir du flot moyen, et que la grille homogénéise les interactions entre tourbillons. La turbulence de structures cohérentes (les mouvements de l'atmosphère en sont un exemple, voir aussi fig. 2.3.4) est plus délicate à analyser.

Dans ce même ordre d'idées, un modèle utilisant une cascade multifractale a été proposé par Meneveau et Sreenivasan (1987a). Examinons ce modèle unidimensionnel très simple car il suffit à décrire assez correctement le comportement multifractal du taux de dissipation ϵ .

Le modèle consiste à considérer que l'énergie injectée dans une section unidimensionnelle L d'un système (dans $d = 3$) se divise en deux sous-

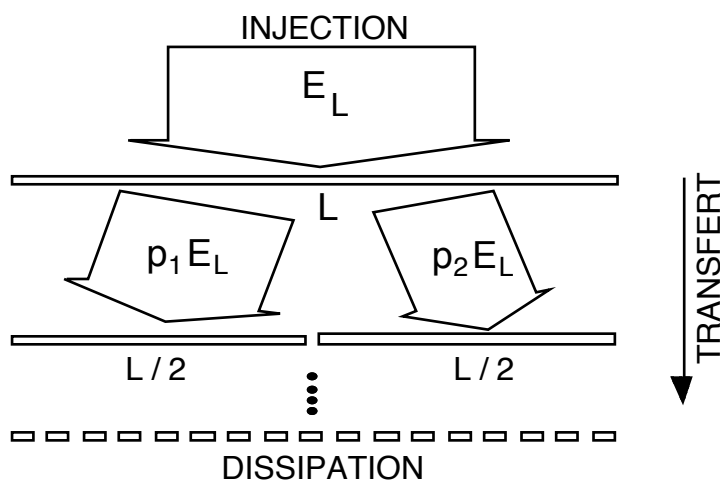


Fig. 2.3.2 Version unidimensionnelle du modèle de tourbillons en cascade de Meneveau et Sreenivasan (1987). Le flux d'énergie cinétique E_L injectée dans le système, est divisé en fractions aléatoires $\{p_1, p_2\}$ à chaque niveau de hiérarchie. Ceci jusqu'à l'échelle de Kolmogorov η .

régions de taille $L/2$ suivant des probabilités p_1 et p_2 et ainsi de suite jusqu'à une taille minimale η (échelle de Kolmogorov) où l'énergie se dissipe. Ce

modèle nous le connaissons, il s'agit d'une *mesure fractale binomiale*. Meneveau et Sreenivasan l'ont utilisé pour interpréter les mesures sur des sections unidimensionnelles de divers flots de turbulence développée (turbulence d'une grille, sillage d'un cylindre circulaire, couche limite, turbulence atmosphérique). Les résultats ont été reportés sur la figure 2.3.3. Plus précisément ils ont tracé la dimension généralisée D_q , qui suffit à décrire complètement la structure multifractale (on vérifie que $D_0 = 1$, car le support de la

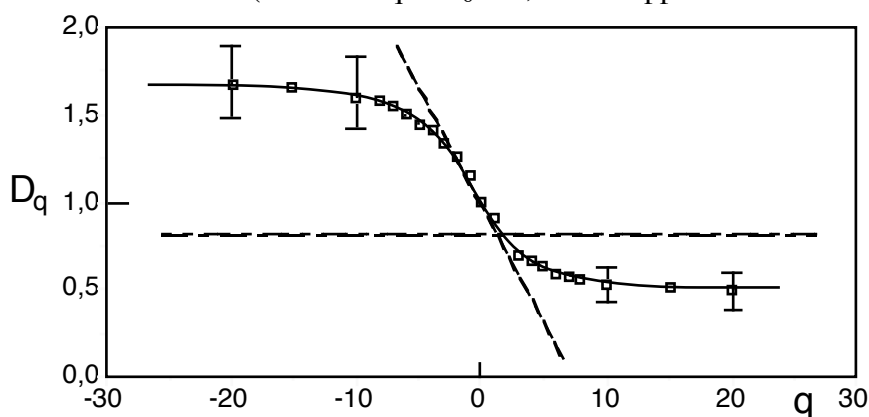


Fig. 2.3.3 Dimensions généralisées de section à une dimension du champ de dissipation dans quelques flots turbulents (Meneveau et Sreenivasan (1987a)). La manière dont les expériences ont été exploitées est détaillée dans Meneveau et Sreenivasan (1987b).

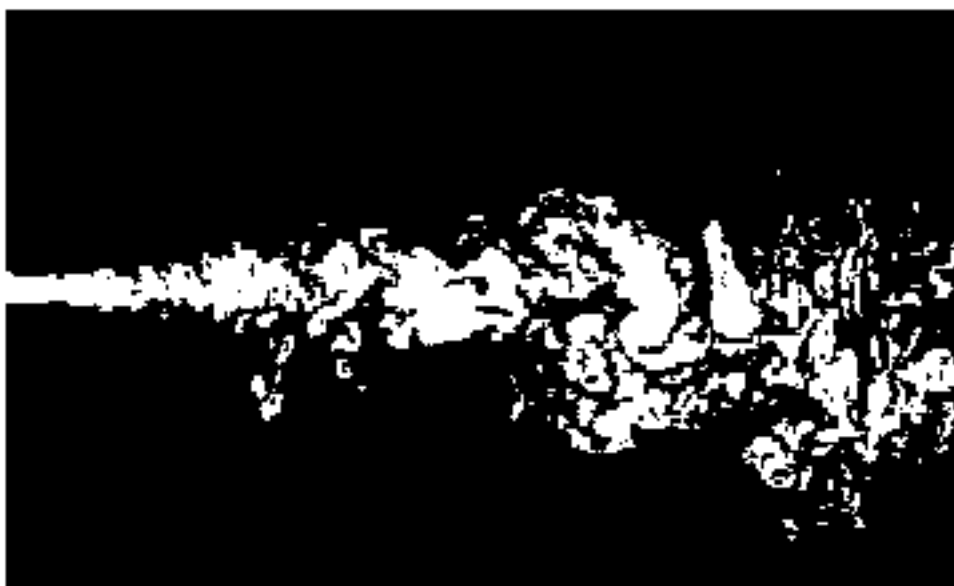


Fig. 2.3.4 Section plane d'un jet axisymétrique obtenue en excitant la fluorescence du fluide injecté (d'après Dimotakis et al. (1981)). Les régions blanches indiquent ici la distribution de matière injectée et non celle des vitesses.

mesure est une droite). Un bon accord est obtenu pour la valeur $p_1 = 0,7$ du modèle binomial. La ligne en point-tirets horizontale correspond au modèle β (non statistique donc pas multifractal, tous les D_q sont donc égaux à $D (< 1)$)

et la ligne en tirets au modèle log-normal¹⁵. Ce modèle binomial est cependant encore trop simple et peut conduire à des interprétations erronées. Le problème a donc été repris en 1988 par ces auteurs en collaboration avec Prasad. Le spectre multifractal $f(\alpha)$ y compris sa partie latente, qui fait intervenir des dimensions fractales négatives, a été obtenu pour plusieurs familles d'expériences. Ces résultats ainsi qu'une revue des approches précédentes sont publiés dans un article détaillé récent (Méneveau et Sreenivasan, 1991).

Pour déterminer expérimentalement la dimension fractale, ou plus généralement la structure multifractale d'une région turbulente tridimensionnelle, on est conduit expérimentalement à séparer les domaines d'un plan où la vorticité est présente de ceux où l'écoulement est purement laminaire. Dans la photographie de la figure 2.3.4, le fluide est illuminé par un faisceau laser plan, ce qui permet de mettre en évidence la distribution de fluide turbulent dans un plan.

A noter également ici une très jolie étude géométrique de H. Herrmann *et al.* (1990), qui ont examiné la possibilité pour des disques de rouler les uns contre les autres sans frottement, tout l'espace dans une bande ou dans un cercle étant rempli par ces disques. Ils ont montré que ceci était possible avec une distribution fractale de disques (cet « engrenage » fractal est un *empilement apollonien*). Leur but était initialement d'étudier l'absence de dissipation d'énergie dans certains mouvements relatifs de plaques tectoniques, mais l'étude peut s'appliquer également à la turbulence où la dissipation ne se fait qu'aux échelles les plus petites. Le modèle conduit à des lois analogues à celle de Kolmogorov en $k^{5/3}$.

2.3.2 Chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs

Parmi les découvertes fondamentales de ces vingt dernières années, l'apparition du chaos dans des systèmes déterministes très simples (mais évidemment non-linéaires !) tient une place importante. L'étude du « *chaos déterministe* » a été considérablement étendue dans les années récentes : si Poincaré avait déjà remarqué en 1892 que certains systèmes mécaniques régis par des équations de Hamilton pouvaient présenter un mouvement chaotique, ce n'est qu'avec le météorologue Lorenz que l'on a pris conscience en 1963 qu'un système contrôlé par des lois aussi simples qu'un système de trois équations différentielles du 1^{er} ordre couplées, pouvait conduire, sans intervention d'un bruit extérieur, à des trajectoires complètement chaotiques : Lorenz avait découvert l'un des premiers exemples de chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs (mais cette découverte a mis quelque temps à être reconnue).

L'existence du chaos déterministe est la conséquence directe de la propriété qu'ont certains systèmes d'être extrêmement *sensibles aux conditions initiales* : une petite erreur sur les valeurs initiales que l'on s'est fixé, donne lieu à une erreur sur la prédiction de l'évolution future qui croît exponentiellement avec le temps¹⁶. Il y a alors en quelque sorte perte de mémoire, car après quelques temps on ne peut plus guère se souvenir des conditions initiales. Quand

¹⁵ Une variable aléatoire V est dite suivre une loi log-normale si sa statistique est complètement déterminée par les deux moments $\langle \log V \rangle$ et $\langle (\log V - \langle \log V \rangle)^2 \rangle$.

¹⁶ Lorenz a donné l'image du battement d'ailes d'un papillon en Australie qui, en modifiant imperceptiblement l'évolution des vents, serait à l'origine d'un cyclone dans les Antilles.

ce type d'évolution a lieu quelles que soient les conditions initiales on dit que cette évolution est chaotique. De nombreux systèmes non linéaires possèdent un comportement chaotique. Citons entre autres, le pendule forcé non linéaire, les lasers, certaines réactions chimiques, les systèmes à trois corps et plus, les modèles biologiques de dynamique des populations...

Dans ces problèmes, on doit séparer très nettement les systèmes sans frottement, dits *conservatifs* ou *hamiltoniens*, des systèmes dits *dissipatifs* qui sont le siège d'un frottement interne. Seuls ces derniers possèdent un *attracteur* par le fait que la dissipation entraîne l'existence d'une limite stationnaire aux temps longs, lorsque de l'énergie leur est injectée de l'extérieur (systèmes entretenus). De tels systèmes ont été étudiés par Smale (voir par exemple Smale, 1980 ; Gleick, 1987) qui est l'inventeur du modèle dit « fer à cheval » des attracteurs étranges. Au contraire, les systèmes hamiltoniens, par l'absence de dissipation, conservent la mémoire des conditions initiales, auxquelles ils peuvent être extrêmement sensibles. Ce fait entraîne la nécessité d'un traitement approprié.

Les systèmes dissipatifs

Dans ces systèmes, le chaos n'apparaît que pour des systèmes ouverts, c'est-à-dire soumis à une force extérieure qui permet de leur réinjecter l'énergie perdue par la dissipation. En effet, pour un système fermé, la dissipation conduit à un état d'équilibre, il devient donc stable. Si l'on considère seulement ces systèmes dissipatifs, au moins trois routes vers le chaos ont été découvertes :

- i) par *bifurcations* successives (Feigenbaum, Couillet et Tresser).
- ii) par passage d'attracteurs périodiques à *attracteurs étranges* (avec un nombre fini de bifurcations selon le scénario de Ruelle, Takens et Newhouse). Il y a dans ce cas transition d'un régime quasi périodique vers le chaos.
- iii) par apparition d'un régime dynamique intermittent (*intermittence* décrite par Pomeau et Manneville).

Comme pour les autres domaines dont l'étendue dépasse les limites de notre propos, nous ne développerons pas dans les détails des diverses routes conduisant au chaos, il existe d'excellents ouvrages sur le sujet, mais nous donnerons au contraire quelques exemples de systèmes simples et quelques modèles montrant comment les structures fractales entrent dans la description des structures chaotiques.

Un système très commun, ayant très peu de degrés de liberté (trois) et conduisant à un régime chaotique est le *pendule simple forcé*. Ce pendule est soumis à une force périodique $F \cos \omega t$ (fig. 2.3.5). Il est gouverné par une équation du second ordre en θ , l'angle d'oscillation, qui se réduit à un système de trois équations du premier ordre. L'évolution d'un tel système peut être

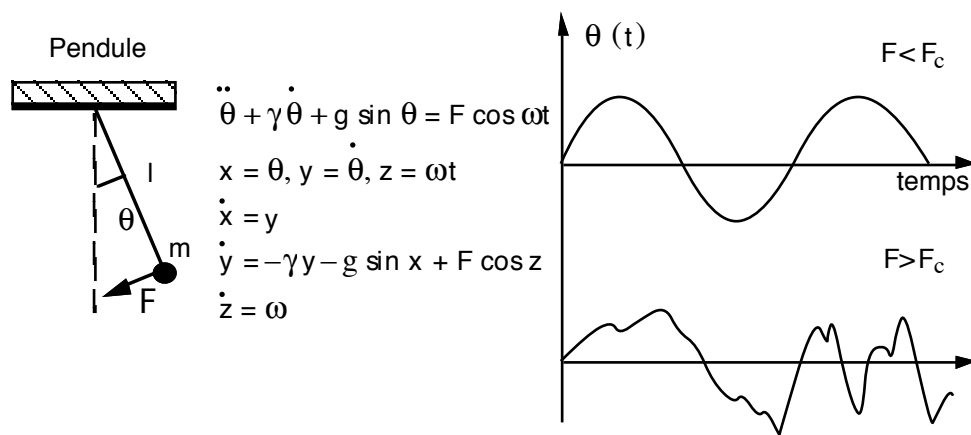


Fig. 2.3.5 Equation gouvernant le pendule simple forcé ($m = 1, l = 1$). Le système devient chaotique lorsque la force appliquée est supérieure à un certain seuil critique.

étudiée en traçant ce que l'on appelle un *portrait de phase*, c'est-à-dire que chaque état du système est représenté par un point de l'espace des phases, l'évolution correspondant alors à une courbe ne se recoupant pas, passant par le point figurant l'état initial. Sur la figure 2.3.5, on voit que l'état du pendule simple forcé est décrit par les 6 coordonnées $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)$.

Le pendule simple forcé présente un régime périodique en θ quand la force appliquée est inférieure à un certain seuil F_c et un régime chaotique lorsque la force F est supérieure à ce seuil (fig. 2.3.5). De nombreux systèmes très faciles à construire possèdent ce genre de comportement. C'est, par exemple, le cas d'une boussole placée dans le champ alternatif d'un électro-aimant... Nous allons décrire plus en détails un système un peu artificiel, mais qui a l'avantage de s'intégrer aisément en se réduisant à une application bidimensionnelle simple, appelée *application de premier retour*. Il s'agit du rotateur heurté périodiquement.

Ce système consiste en un rotateur amorti par le frottement (paramètre γ), caractérisé par un angle ϕ , heurté avec une période T , par une force impulsionnelle dont l'intensité est une fonction¹⁷ de cet angle ϕ , soit $K f(\phi)$. Le schéma du modèle et les équations du mouvement sont décrits figure 2.3.6.

Après intégration sur une période T dont les bornes se situent juste avant un choc, ce système assez simple peut être réduit à une application bidimensionnelle pour le couple de variables $(x_n, y_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{x(nT - \epsilon), y(nT - \epsilon)\}$. On trouve (Schuster, 1984),

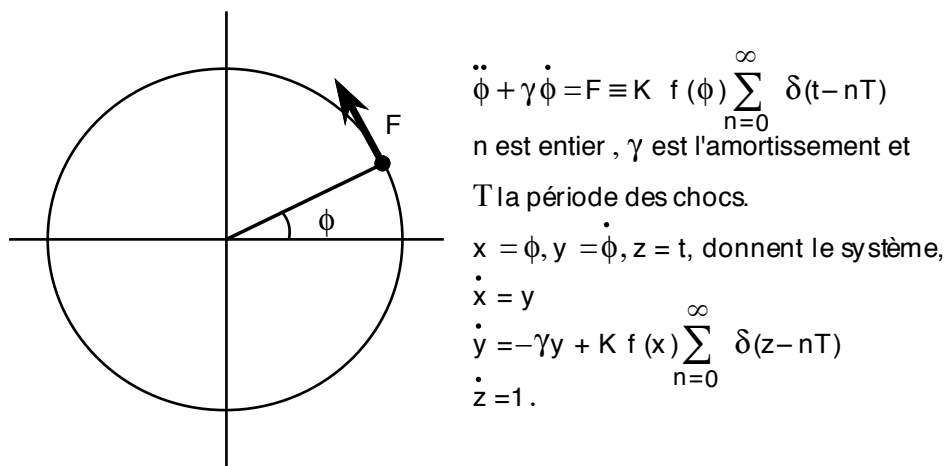
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-\gamma T}}{\Gamma} [y_n + K f(x_n)]$$

$$y_{n+1} = e^{-\gamma T} [y_n + K f(x_n)]$$

L'évolution des solutions d'une équation de ce type peut être représentée

¹⁷ La fonction f est arbitraire mais la nature du chaos engendré dépend de sa forme (voir l'exemple page suivante à propos de l'application de premier retour).

graphiquement comme l'évolution d'un point du plan (x_n, y_n) en fonction du temps c'est-à-dire de n , avec un couple (x_0, y_0) comme conditions initiales.



$$\ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} = F \equiv K f(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

n est entier, γ est l'amortissement et T la période des chocs.

$x = \phi, y = \dot{\phi}, z = t$, donnent le système,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y + K f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z - nT) \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned}$$

Fig. 2.3.6 Equations gouvernant le rotateur heurté périodiquement.

L'ensemble des (x_n, y_n) ne fournit pas la totalité du portrait de phase du système mais une section bidimensionnelle (associée à une application bidimensionnelle) formée de points discrets correspondant à des photos (images stroboscopiques) du rotateur prises à des instants multiples de T . Une telle représentation s'appelle une *section de Poincaré*. C'est la trace du mouvement dans l'espace des phases sur un sous-espace plus aisé à visualiser.

Application de premier retour

On appelle ainsi une application de la forme

$$\boxed{\vec{x}_{n+1} = A(\vec{x}_n)} \quad (2.3-4)$$

Ainsi l'application quadratique à une dimension,

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (2.3-5)$$

a joué un rôle fondamental par son extrême richesse, dans l'étude des processus menant au chaos déterministe. La découverte de ses remarquables propriétés est due à Metropolis *et al.* (1973) et plus particulièrement à M.J. Feigenbaum (1978). C'est le prototype des mécanismes engendrant une infinité de bifurcations sous-harmoniques (lorsque r croît de 1 à 4). On parle alors de *cascade sous-harmonique*. L'application quadratique est un cas limite du rotateur heurté périodiquement, correspondant à l'amortissement fort ($\gamma \rightarrow \infty$), et à $K \rightarrow \infty$, avec $\gamma/K = 1$ et le choix $f(x) = (r - 1)x - r x^2$.

La cascade sous-harmonique

Pour $1 \leq r \leq r_1 = 3$, x_n tend dans le cas de l'application quadratique vers un point fixe x^* défini par $x^* = A(x^*)$, soit $x^* = 1 - 1/r$. Dans le cas du rotateur

heurté, x_n est l'angle de rotation juste avant le $n^{\text{ème}}$ choc (donné avec la pé-

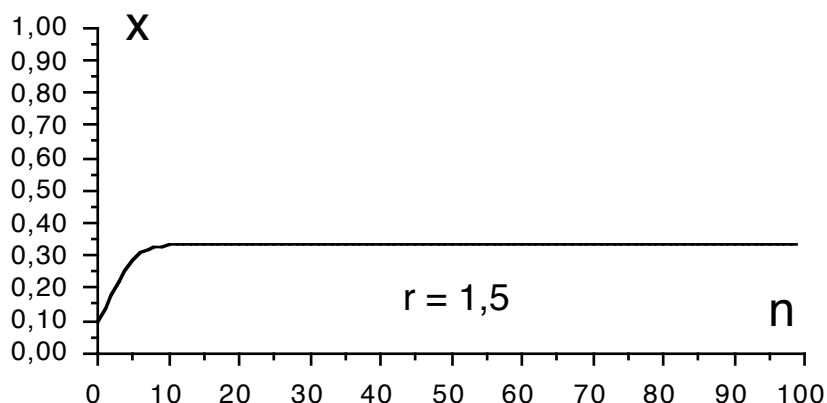


Fig.2.3.7 Itération de l'application quadratique lorsque l'attracteur se réduit à un point fixe x^* ($1 \leq r \leq r_1 = 3$).

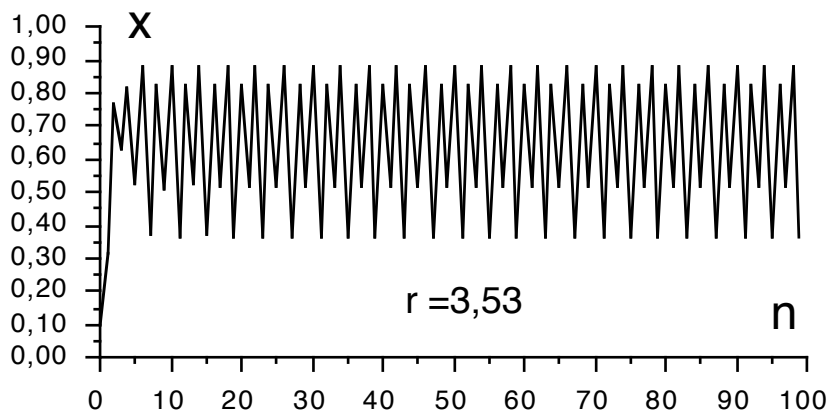


Fig.2.3.8 Itération de l'application quadratique lorsque l'attracteur est un cycle de quatre points.

riodicité T), x_{n+1} est le *premier retour* de l'angle un temps T plus tard. Au bout d'un nombre assez grand de chocs cet angle se stabilise à une valeur $\phi = x^*$. Seule la fréquence $f_0 = 2\pi/T$ (et ses harmoniques) apparaît donc dans le spectre du mouvement du pendule heurté dans le cas limite ci-dessus. Quand r atteint la valeur r_1 une première bifurcation apparaît, et pour $r_1 < r \leq r_2 (= 1 + \sqrt{6} \approx 3,44)$ x_n tend rapidement vers une situation où il oscille entre deux valeurs, $x^{(1)}_1$ et $x^{(1)}_2$ définies par $x^{(1)}_i = A(A(x^{(1)}_i))$. x^* reste évidemment une solution de cette dernière équation mais est maintenant instable. Si l'on applique ce résultat au rotateur heurté on voit qu'alors l'impulsion est donnée à chaque passage où l'angle ϕ prend les valeurs $\phi^{(1)}_1$ et $\phi^{(1)}_2$.

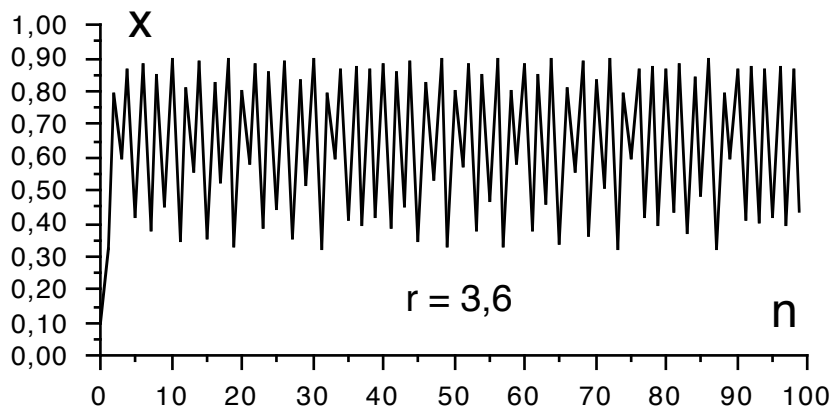


Fig.2.3.9 Itération de l'application quadratique lorsque l'attracteur devient apériodique. On est dans le régime chaotique: la séquence des x_n se répartit sur $[0,1]$ en engendrant une structure fractale. Les séquences dépendent de manière très sensible de la valeur initiale.

Les fréquences f_0 et $f_0/2$ (et leurs harmoniques) apparaissent ainsi dans le spectre. D'où la dénomination de *cascade sous-harmonique*.

Puis une nouvelle bifurcation naît à $r=r_3$ et x_n tend vers un cycle à quatre points (fig. 2.3.8) (et les fréquences $f_0, f_0/2, f_0/4$ apparaissent). Après k bifurcations, on obtient un cycle de 2^k points $x^{(k)}_i$ et l'apparition de sous-harmoniques jusqu'à $f_0/2^k$. L'ensemble $x^{(k)}$ des $x^{(k)}_i$ formant un cycle de 2^k points est appelé un *attracteur*, puisque dans ce cas, pour toute condition initiale, la suite des x_n finit par converger vers cet ensemble. Les bifurcations se succèdent ainsi jusqu'à une valeur $r_\infty \cong 3,569\ 945\ 6\dots$. L'ensemble limite $x^{(\infty)}$ n'est plus périodique ; il est alors appelé un *attracteur étrange*. La figure 2.3.10 représente la distribution des points fixes $x^{(k)}_i$. Leur structure ressemble aux itérations successives d'un ensemble de Cantor quand r croît de 1 à r_∞ . Une grandeur universelle importante est le rapport de convergence des bifurcations successives défini par le rapport,

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = 4,669\ 201\ 609\dots \quad (2.3-6)$$

Enfin un régime chaotique apparaît pour $r_\infty \leq r \leq 4$ (fig. 2.3.9). Les sous-harmoniques $f_0/2^k$ disparaissent alors les uns après les autres (dans l'ordre inverse de leur apparition) tandis qu'une composante de bruit se développe.

Autre fait remarquable, le domaine $r_\infty \leq r \leq 4$ n'est pas chaotique partout. Il existe des fenêtres de périodicité que l'on observe très bien sur la figure

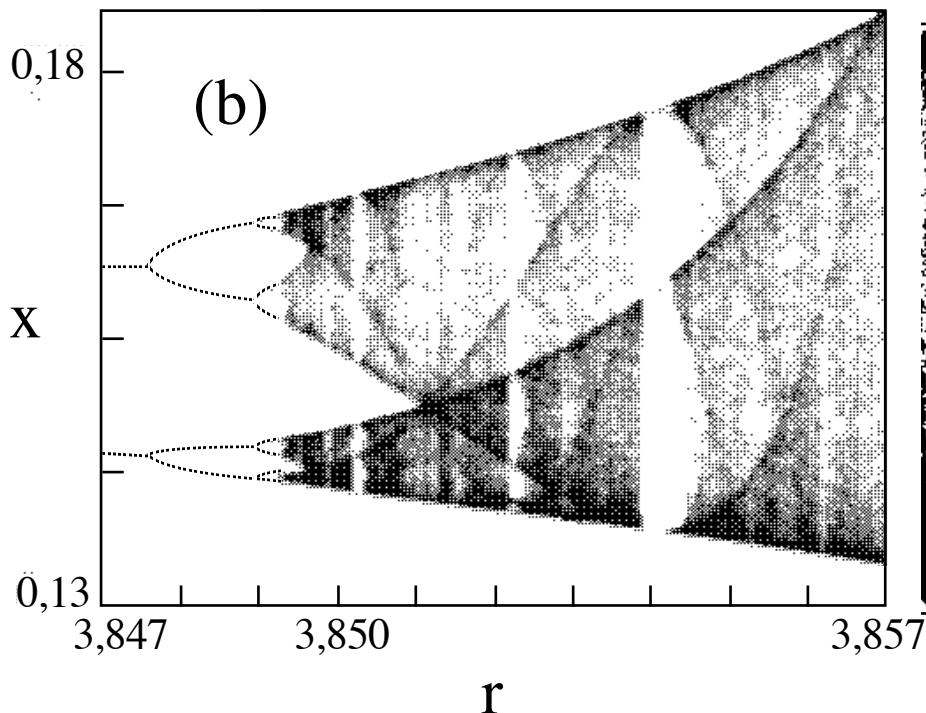


Fig.2.3.10 Attracteur de l'application quadratique. La figure (a) représente l'attracteur complet, la figure (b) un agrandissement indiqué par la flèche sur la figure (a), dans une fenêtre de périodicité trois. D'après R. Eckardt, From Cardinals to Chaos (1989).

(2.3.10). Certaines d'entre elles mettent en jeu une périodicité 3 (qui apparaît par exemple à $r = 1 + \sqrt{8}$) avec une nouvelle cascade sous-harmonique conduisant au chaos. Pour $r > 4$ il n'existe plus d'état stationnaire, la suite des x_n n'étant plus bornée.¹⁸

La dimension de Hausdorff de l'ensemble $x^{(\infty)}$ (lié à r_{∞}) a été déterminée par Grassberger (1981) numériquement et analytiquement : $D \cong 0,5388\dots$

Instabilité de Rayleigh-Bénard et cascade sous-harmonique

Si on place un liquide ayant un coefficient de dilatation positive entre deux plaques horizontales maintenues à des températures fixées T pour la plaque supérieure et $T + \Delta T$ pour la plaque inférieure, ce liquide a tendance à prendre un mouvement du bas vers le haut, d'où une instabilité, dite instabilité de Rayleigh-Bénard : pour les faibles valeurs de ΔT le transport d'énergie se fait par simple conduction sans mouvement de matière car la structure est encore stable ; puis pour des valeurs de ΔT supérieures à un certain seuil (soit $Ra > Ra_c$ le paramètre pertinent étant le nombre¹⁹ de Rayleigh Ra), des rouleaux de convection apparaissent, tout d'abord fixes spatialement avec une succession de courants ascendants et descendants comme l'indique la figure 2.3.11, le

¹⁸Plus précisément il ne subsiste plus qu'un Cantor invariant borné.

¹⁹ Ra est proportionnel à ΔT , au coefficient de dilatation volumique du fluide, à son poids dans un cube de côté la distance entre plaques, et inversement proportionnel à la viscosité μ et à la diffusivité thermique D_T .

sens de rotation des rouleaux étant d'ailleurs équiprobables. Au seuil, il y a donc une première bifurcation entre ces deux états possibles. Quand la température croît, le nombre d'états possibles augmente également et l'existence de ce grand nombre de degrés de liberté permet l'apparition d'un régime turbulent : la structure en rouleaux est complètement détruite.

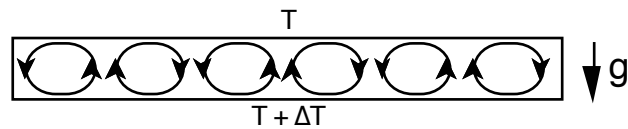


Fig. 2.3.11 Cellule de Rayleigh-Bénard : une différence de température induit dans le fluide une différence de densité et donc une instabilité en présence du champ de gravitation. Des rouleaux apparaissent, qui deviennent instables et chaotiques au-dessus d'un ΔT critique.

Dans l'expérience de Libchaber, Fauve et Laroche (1983), le liquide est du mercure. L'expérience est réalisée à très faible nombre de Prandl ($Pr = \nu_0 / D_T \cong 0,03$). Le mercure est placé entre deux plaques épaisses en cuivre. Comme la cellule est opaque, on mesure les fluctuations de température du fluide en un point (fig. 2.3.12) à l'aide d'un bolomètre. Pour stabiliser l'orientation des rouleaux, la cellule est placée dans un champ magnétique constant. En faisant croître ΔT , le nombre de Rayleigh traverse le seuil Ra_c (quelques précautions expérimentales sont nécessaires dans cette première

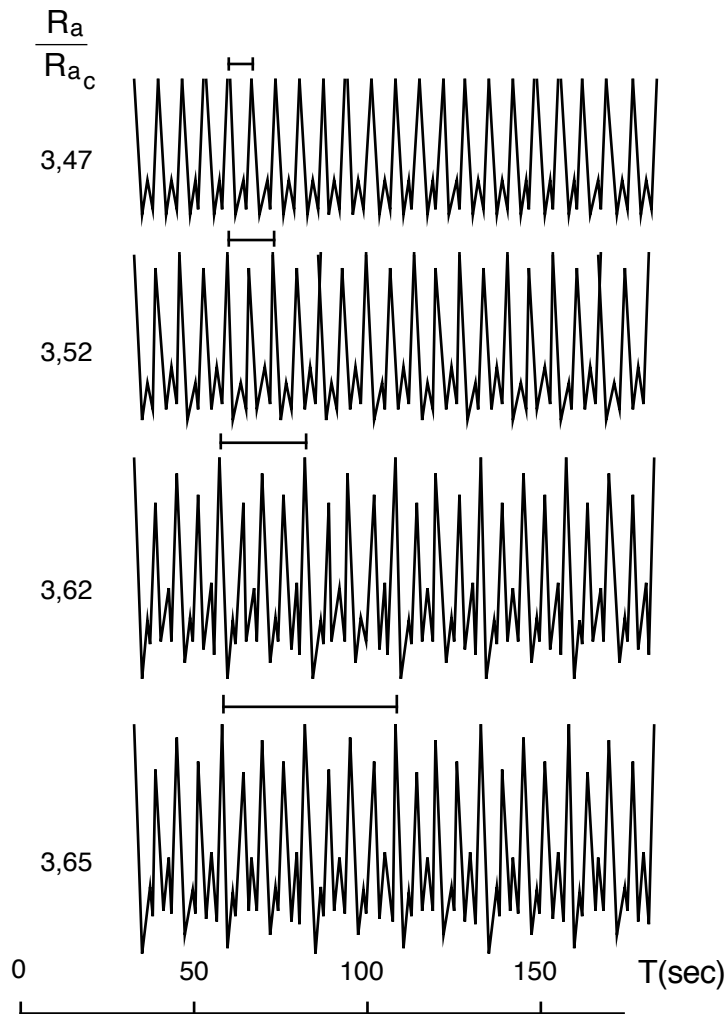


Fig. 2.3.12 Cascade sous harmonique dans une expérience de thermoconvection (Libchaber et al. 1983). Les segments indiquent la longueur d'une période de fluctuation des températures en un point du fluide.

phase de l'expérience), puis des bifurcations successives apparaissent, correspondant aux fréquences $f_1/2$, $f_1/4$, $f_1/8$... Les harmoniques de rang impair sont également présentes dans le spectre. On peut déterminer le rapport de convergence des bifurcations successives, on trouve une valeur de 4,4 au lieu de la valeur théorique universelle de 4,669..., ce qui est très raisonnable.

Un modèle (très approché) de la convection Rayleigh-Bénard est celui de Lorenz (1963). C'est, comme dans les exemples précédents, un système de 3 équations du premier ordre avec des termes rectangles xy et xz obtenu en simplifiant à l'extrême les équations de Navier-Stokes et de propagation de la chaleur : en développant ces équations en modes de Fourier spatiaux jusqu'à l'ordre trois dans les modes les plus bas, et en ignorant le couplage entre les autres modes, on obtient le système d'équations de Lorenz,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -\alpha x - r x - y \\ \dot{z} &= \alpha y - b z \quad \text{où } \sigma, r \text{ et } b \text{ sont les paramètres du système ;} \quad (2.3-7)\end{aligned}$$

x mesure le taux de retournement convectif, y et z mesurent les variations horizontale et verticale de température, σ correspond au nombre de Prandtl, r est proportionnel au nombre de Rayleigh, et b reflète le fait que les variations horizontales et verticales de température ne s'amortissent pas au même taux.

Applications itérées dans le plan complexe

Une classe d'application très intéressante pour les mathématiciens est celle des itérations dans le plan complexe. Elles ont donné lieu à des réalisations graphiques (grâce à l'utilisation des ordinateurs actuels) d'une richesse inconnue jusqu'alors (voir par exemple, Peitgen et Richter 1986).

Considérons par exemple l'application A suivante du plan complexe,

$$z \rightarrow A(z) = z^2 + C \quad (2.3-8)$$

On définit par itération les *ensembles de Julia* et de *Mandelbrot* de cette application : l'itération s'écrit,

$$z_{n+1} = z_n^2 + C \quad (2.3-9)$$

avec pour état initial les deux affixes $\{C \text{ et } z_0\}$.

Pour faire le lien avec ce qui précède on peut noter que cette itération correspond à une équation dynamique dans le plan (où $C = a + ib$, $z_n = x_n + iy_n$), si on écrit que,

$$\begin{aligned}dx_n/dn \approx x_{n+1} - x_n &= x_n^2 - x_n - y_n^2 + a, & \text{soit} & \quad \dot{x} = x^2 - x - y^2 + a \\ dy_n/dn \approx y_{n+1} - y_n &= x_n y_n - y_n + b & & \quad \dot{y} = xy - y + b.\end{aligned}$$

Ensembles de Julia J_c

On fixe C , et on considère la séquence $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \dots$. Pour beaucoup de z_0 , $|z_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. La fuite des points vers l'infini est exponentielle ($\exp \lambda n$) au voisinage immédiat de l'ensemble de Julia²⁰. L'ensemble J_c est aisément construit à partir de l'application inverse : $z_0 \rightarrow z_{-1} \rightarrow z_{-2} \dots$ où,

$$z_{n-1} = \pm \sqrt{z_n - C} \quad (2.3-10)$$

Cette suite converge en effet exponentiellement vers l'ensemble de Julia. Comme il y a deux valeurs possibles pour l'application inverse, celles-ci sont choisies au hasard (avec par exemple une probabilité égale).

J_c peut être également considéré comme la frontière de l'ensemble des points z_0 tels que les z_n restent bornés, que l'on appelle le *bassin d'attraction de l'application* (non nécessairement connexe)²¹. J_c dépend de C de manière

²⁰ Dans les problèmes de turbulence, l'exposant λ est appelé *exposant de Lyapounov*.

L'évolution d'un flot chaotique est d'autant plus difficile à saisir que la divergence des trajectoires est rapide. D'où l'intérêt de connaître λ .

²¹ On pourrait donc itérer A en partant d'un point z_0 du bassin d'attraction. Cependant si celui-ci est un ensemble de Cantor, on risque d'avoir des difficultés à trouver un tel point.

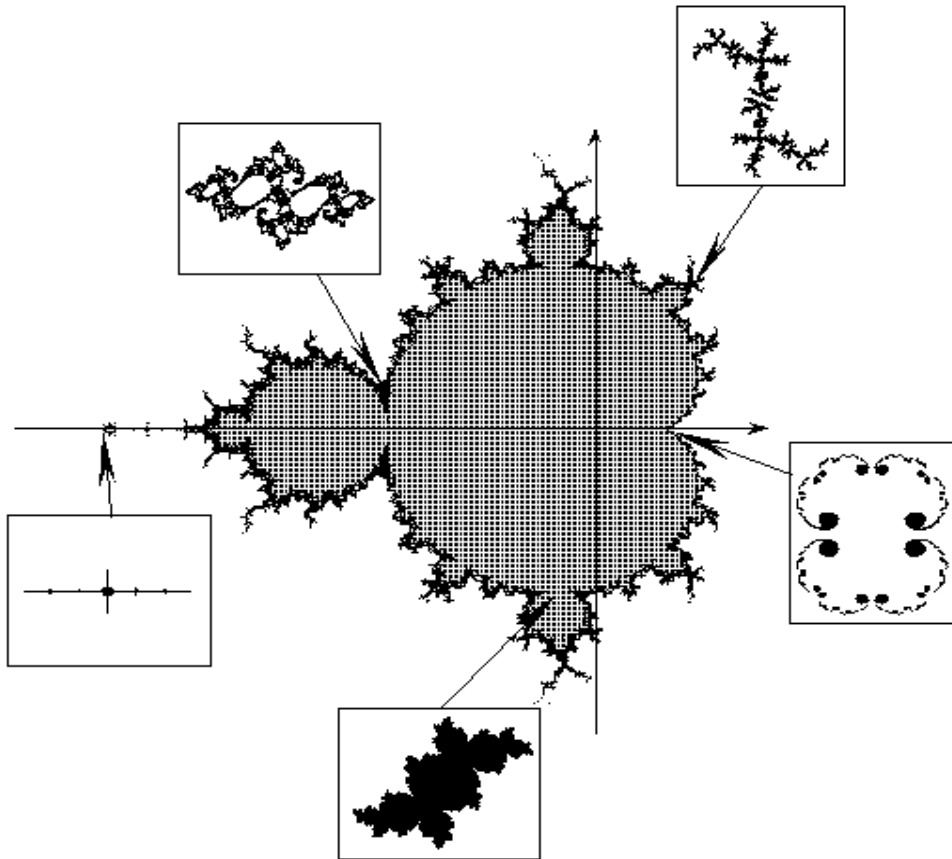


Fig.2.3.13 Ensemble de Mandelbrot (en grisé) pour l'itération $z \rightarrow z^2 + C$. Dans les encarts on a représenté les ensembles de Julia correspondant à des valeurs de C indiquées par une flèche. L'ensemble de Mandelbrot est entouré d'un liseré noir qui donne (à la manière d'une plage en bord de mer) une idée de la vitesse à laquelle les affixes z s'éloignent de l'ensemble au cours de l'itération (plus la plage est étroite plus le point s'éloigne vite).

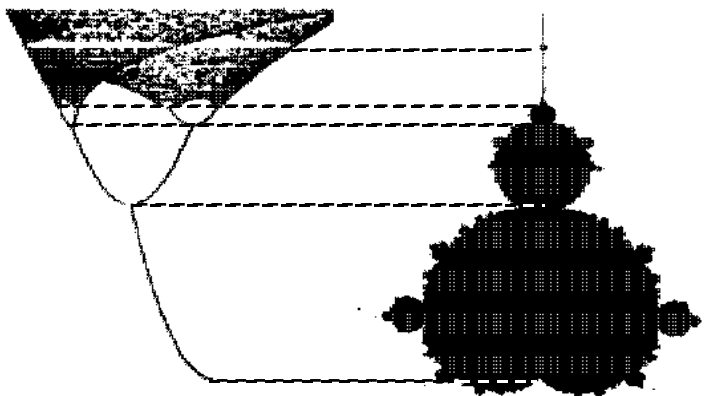


Fig.2.3.14 Correspondance entre l'ensemble de Mandelbrot et l'application de premier retour $x_{n+1} = x_n^2 + C$. Noter la répétition du motif en cactus associé à chaque bifurcation.

incroyablement sensible. Certains ensembles de Julia sont d'une seule pièce, d'autres ne sont que des nuages de points (ensembles de Cantor). Le cas le plus simple correspond à $C = 0$. L'application $z_{n+1} = z_n^2$ donne en partant de $z_0 = \rho e^{i\phi}$, $z_n = \rho^{2^n} e^{2in\phi}$. Si $\rho > 1$, $z_n \rightarrow \infty$, et si $\rho < 1$, $z_n \rightarrow 0$. L'ensemble de Julia J_0 est le cercle $|z| = 1$, le bassin d'attraction l'intérieur du cercle (Fatou, 1919 ; Julia, 1918).

A propos des ensembles de Julia, on pourra consulter avec intérêt les mémoires de Julia et Fatou qui avaient pu deviner nombre des caractéristiques de ces ensembles sans bien sûr avoir pu les visualiser sur ordinateur ! Voir également Brolin (1965) et pour les plus travaux récents, Blanchard (1984).

Ensemble de Mandelbrot

C'est l'ensemble \mathcal{M} des C tels que pour $z_0 = 0$, z_n restent bornés (Mandelbrot 1980). Plus fondamentalement, \mathcal{M} est aussi l'ensemble des C tels que J_c soit connexe. La vitesse de fuite des points à l'extérieur de \mathcal{M} est liée à la résolution de l'équation de Laplace, \mathcal{M} étant considéré comme un conducteur chargé.

Ces divers ensembles ont une structure fractale. La figure 2.3.14 représente la correspondance entre l'ensemble de Mandelbrot dans le plan complexe et la structure de bifurcation de l'application de premier retour quadratique (*logistic map*) modifiée $x_{n+1} = x_n^2 + C$ le long de l'axe réel (d'après Peitgen et Richter, 1986, p. 11).

Attracteur étrange

Nous avons vu que les attracteurs périodiques correspondent à des signaux parfaitement prévisibles en ce sens que la connaissance d'une séquence suffisamment longue du signal ($\theta(t)$ par exemple) permet de prédire la totalité du signal futur avec une précision égale à la précision sur la séquence connue. Il n'en est plus de même lorsque l'attracteur devient apériodique, car il est impossible en pratique, quelle que soit la portion de signal considérée, de prédire le signal futur au-delà d'un temps très limité, à cause de la *sensibilité extrême aux conditions initiales* : les histoires de deux points très voisins n'ont

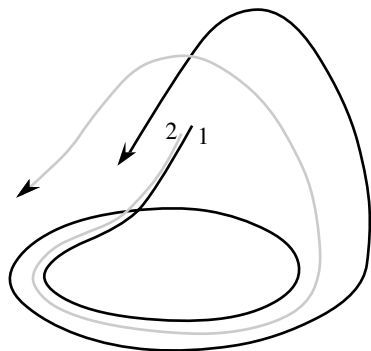


Fig. 2.3.15 Représentation schématique de deux trajectoires (1) et (2) initialement très voisines, s'éloignant exponentiellement (exposant de Lyapounov positif) puis retournant vers la spirale (d'après Abraham et Shaw 1983, deuxième partie)
plus rien de commun au bout d'un temps fini assez grand. On est alors dans

la situation étrange où les histoires (trajectoires dans l'espace des phases) divergent exponentiellement²² mais où il s'agit cependant d'un attracteur. Ceci n'est pas possible dans n'importe quel espace des phases pour des raisons topologiques car deux trajectoires ne peuvent se croiser²³ et il faut au moins un espace de dimension trois. Il est alors possible aux trajectoires de rester confinées dans un domaine borné tout en possédant une sensibilité aux conditions initiales les faisant s'éloigner au début de manière exponentielle comme la figure 2.3.15 le montre. On a ici encore affaire à un *attracteur étrange*.

L'attracteur de Hénon

Hénon (1976) a suggéré une forme plus simple du système d'équations de Lorenz, obtenue en discrétisant le temps, ce qui permet de transformer le système à trois équations différentielles de Lorenz en une application à deux dimensions. Il a donc étudié l'application suivante du plan sur lui-même,

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= Y_k + 1 - \alpha X_k^2 \\ Y_{k+1} &= \beta X_k \end{aligned} \quad (2.3-11)$$

Ce type d'application itérée se prête particulièrement bien à une étude approfondie. Quels que soient les points initiaux choisis à l'intérieur du bassin d'attraction de l'application, les itérés successifs convergent très rapidement vers un attracteur étrange, l'*attracteur de Hénon*, dont la dimension de Hausdorff est $D \cong 1,26$. On vérifie d'autre part facilement, en calculant le jacobien de la transformation (2.3-11) que les aires sont multipliées à chaque itération par le facteur $|\beta|$.

Multifractalité des attracteurs étranges

L'analyse multifractale est un outil bien adapté à la caractérisation des attracteurs étranges. Voici un exemple tiré de l'expérience. En 1985, Jensen et collaborateurs ont étudié la thermoconvection du mercure dans des cellules parallélépipédiques de petite taille (7mm × 14mm sur 7mm de hauteur). Dans la configuration géométrique choisie, le rapport deux entre la hauteur et la largeur de la cellule de Rayleigh-Bénard force le nombre de rouleaux à se limiter à deux. Le nombre de degrés de liberté est ainsi très réduit et seules des instabilités secondaires apparaissent. A mesure que l'on augmente ΔT , les rouleaux se déforment à une fréquence f_1 (le spectre de Fourier contenant $f_1, 2f_1 \dots$) et l'état du système peut être représenté par un point sur un cercle, tournant (non uniformément) à la fréquence f_1 ; puis en augmentant encore ΔT une bifurcation nouvelle voit le jour à la fréquence f_2 (le spectre de Fourier contenant alors $f_1, f_1 - f_2, 2f_2 \dots$) et le système devient quasi périodique, car f_1 et f_2 n'ont aucune raison d'être commensurables. Son état

²² Il faut bien sûr préciser que la divergence exponentielle de trajectoires initialement très voisines ne se maintient que pendant un certain intervalle de temps (voir fig. 2.3.15).

²³ A partir du point de croisement il existerait deux évolutions permises ce qui est impossible.

peut être représenté comme un point sur un tore²⁴ (fig. 2.3.16).

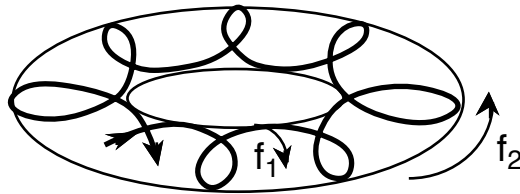


Fig. 2.3.16 Représentation de l'état d'un système à 2 fréquences par un point d'un tore T^2 . Si les fréquences sont incommensurables, l'image de la trajectoire au cours du temps ne se superpose pas ; si f_1/f_2 est une fraction rationnelle, celle-ci se superpose après un nombre fini de tours.

En fait, ce régime quasi périodique ne subsiste pas et on constate un accrochage sur une fréquence f_0 telle que $f_0 = f_1 = 2f_2$, par ajustement²⁵ des fréquences f_1 et f_2 . Dans ces systèmes, le régime de chaos apparaît au bout de quelques bifurcations seulement selon un scénario dit de Ruelle-Takens et Newhouse, car la petite taille de la cellule empêche la cascade sous-harmonique de se développer. Mais comme nous l'avons vu plus haut, il faut au moins trois dimensions pour construire un attracteur étrange, de sorte qu'avec les deux fréquences f_1 et f_2 les trajectoires ne peuvent jamais diverger exponentiellement et le chaos s'installe. Si une troisième fréquence apparaît, les trajectoires sont maintenant sur un tore T^3 et l'accès au chaos est possible, les trajectoires n'étant plus confinées sur une surface (comme dans la figure (2.3.15)).

La transition vers le chaos peut en fait se produire directement à partir du tore T^2 sans apparition d'une troisième fréquence ; il suffit plus généralement d'un troisième degré de liberté²⁶ (dû par exemple à un champ extérieur forçant le système). A cause de ce nouveau paramètre, les trajectoires quittent la surface du tore. Le seuil de l'apparition du chaos pour lequel le tore T^2 « explose », comme on peut le montrer sur le modèle théorique de l'expérience de Rayleigh-Bénard, correspond à $f_1/f_2 = (\sqrt{5}+1)/2$, le nombre d'or.

Dans l'expérience de Jensen *et al.* (1985), le système Rayleigh-Bénard est donc forcé par un oscillateur électromagnétique : on fait passer un courant alternatif de fréquence f_{ext} dans le mercure en présence d'un champ magnétique parallèle aux rouleaux de manière à engendrer des tourbillons verticaux. Ceux-ci se couplent non linéairement aux tourbillons que nous venons de décrire ci-dessus (deux rouleaux de convection sont présents dans la cellule).

²⁴ Les trajectoires ne se coupent pas sur le tore à condition de le déplier, car un point du tore n'est défini qu'à $2k\pi$ près. La règle de non croisement n'est donc pas violée.

²⁵ Cet ajustement est également présent dans l'expérience de Libchaber et collaborateurs.

²⁶ Un modèle de ce type est celui de Curry et Yorke (1977).

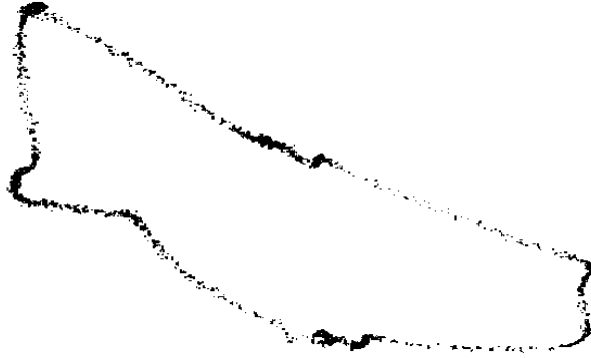


Fig. 2.3.17 L'attracteur bidimensionnel ci-dessus comporte 2 500 points expérimentaux. Les points se répartissent théoriquement sur une courbe fermée, l'étalement que l'on voit ici est dû à la dérive des paramètres expérimentaux. Les variations de densité des points proviennent en partie de la projection de la courbe tridimensionnelle sur le plan (Jensen et al., 1985).

L'intensité du courant alternatif permet d'ajuster le couplage non linéaire. Cette perturbation permet d'engendrer le régime chaotique à partir de deux fréquences (f_1 et f_{ext} choisies dans le rapport du nombre d'or, $f_1 \cong 230$ mHz). Le chaos se traduit alors par une distribution préchaotique des trajectoires sur le tore qui existe encore puisque l'on est juste au seuil critique. Quand ce régime critique est instauré ($Ra / Ra_c = 4,09$, ce qui donne une grande amplitude à f_1), on effectue des mesures de la température T en un point du fluide à intervalles périodiques (c'est-à-dire que l'on examine en fait les points de la trajectoire sur une section du tore. Le graphe $T(t + 1)$ en fonction de $T(t)$ est montré sur la figure 2.3.17. Pour éviter les effets de projection, l'analyse multifractale a été effectuée en fait dans une représentation tridimensionnelle ($T(t + 2)$, $T(t + 1)$, $T(t)$). La mesure multifractale de la section de Poincaré (fig.2.3.17) est obtenue suivant une méthode voisine de la méthode décrite au § 1.6.2. Plus précisément, on associe à chaque élément de volume de rayon ϵ , au voisinage d'un point \vec{x} de cette section, une mesure qui est la probabilité de retour dans cet élément au bout d'un temps fixé. En pratique, on compte sur un intervalle de temps fixé, le nombre de pas $m(\epsilon, \vec{x})$ pour retourner au voisinage de \vec{x} , la probabilité étant alors $\mu(\epsilon, \vec{x}) = 1/m(\epsilon, \vec{x})$. On calcule alors la mesure multifractale *via*,

$$\langle \mu(\epsilon)^{q-1} \rangle = \sum_{i \in \text{boîtes}} \mu(\epsilon, \vec{x}_i)^q = \epsilon^d \sum_{\vec{x}} \mu(\epsilon, \vec{x})^{q-1} = M_q(\epsilon) \quad (2.3-12)$$

Comme la sommation porte sur tous les points x , et non sur les boîtes i , ainsi que l'exige la méthode des boîtes, un facteur $\epsilon^d / \mu(\epsilon, \vec{x})$ doit être introduit. Ayant calculé $M_q(\epsilon)$ après digitalisation de l'attracteur expérimental, on détermine $\tau(q)$ et donc $f(\alpha)$ par transformée de Legendre (§ 1.6.2 & 4). Les points expérimentaux sont portés sur la figure 2.3.18, ainsi que la courbe théorique obtenue à partir du calcul de la distribution dans une coupe (un cercle) du tore, pour la valeur critique du rapport de fréquence (le nombre d'or). Il n'y a donc

aucun paramètre ajustable et la comparaison entre théorie et expérience s'avère excellente.

On vérifie sur cette courbe $f(\alpha)$ que son maximum D_0 est égal à un, comme on peut s'y attendre puisque le support de la mesure multifractale est un cercle, section du tore T^2 de la figure 2.3.16 (ou possède une topologie équivalente à celle d'un cercle).

Cette expérience représente ainsi l'un des cas où il s'est avéré possible de confronter l'expérience au modèle théorique de multifractalité des attracteurs étranges.

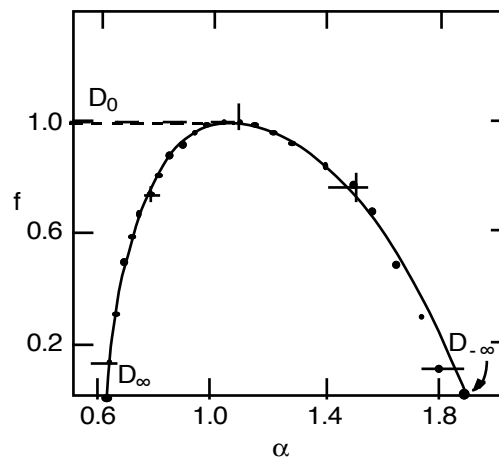


Fig. 2.3.18 Courbes $f(\alpha)$ expérimentale et théorique dans l'expérience de Rayleigh-Bénard forcée. La comparaison entre la théorie (sans paramètres ajustables) et l'expérience est très remarquable (Jensen et al., 1985).

